Lehr- und Forschungsgebiet

Wasserbau und Wasserwirtschaft

BERGISCHE UNIVERSITÄT GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Bericht Nr. 1

Bergische Universität - Gesamthochschule Wuppertal

Fachbereich 11 Bautechnik

Lehr- und Forschungsgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft

Pauluskirchstr. 7, 5600 Wuppertal 2

Tel.: 0202 - 439 3194

Papyrus-Druck GmbH

Bismarckstr. 19, 1000 Berlin 12

V O R W O R T

Eine Schriftenreihe ist ein geeignetes und deshalb von Forschungseinrichtungen oft benutztes Instrument, um über interessante Forschungsaktivitäten zu berichten, Ergebnisse vorzustellen und Diskussionen in Gang zu setzen. Darüber hinaus bietet sich dieses Organ für die Veröffentlichung von wissenschaftlichen Arbeiten an, die wegen ihres Umfanges für andere Publikationsorgane nicht geeignet sind. Ein nationaler und internationaler Mitteilungsaustausch eröffnet darüber hinaus die Möglichkeit, viele potentielle Interessenten direkt zu erreichen. Diese Überlegungen und die Erkenntnis, daß diese Publikationen einen enormen Fundus für alle technisch-wissenschaftlichen Arbeiten darstellen, haben mich bewogen, auf diesem Wege auch über unsere Forschungsaktivitäten zu berichten.

Das Lehr- und Forschungsgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft an der Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal wurde 1981 ins Leben gerufen. In den ersten Jahren war der überwiegende Teil der Kapazität für den schnellen Aufbau der Lehrveranstaltungen und des Labors gebunden, erst später konnten wir uns zögerlich Forschungsaufgaben zuwenden. Um so erfreulicher ist die Tatsache, daß mit der vorliegenden Mitteilung Nr. 1 über die ersten Ergebnisse einer wissenschaftlichen Forschungsarbeit auf dem Gebiet der instationären Rohrströmung berichtet werden kann.

Wuppertal im Januar 1986

H. Kaldenhoff

BERECHNUNG DER MASSENSCHWINGUNGEN IN DIFFERENTIALWASSERSCHLÖSSERN UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG VON MEHRFACHSCHALTFÄLLEN

Dissertation zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
des Fachbereiches Bautechnik an der
Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal

von
Dipl.-Ing. Ulrich Roth
aus Remscheid

Wuppertal 1985

Dissertation eingereicht am: 19. 6.1985
Tag der mündlichen Prüfung: 11.12.1985
erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Kaldenhoff
zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. F.H. Schroeder

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Lehr- und Forschungsgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft im Fachbereich Bautechnik der Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Kaldenhoff nicht nur für seine Unterstützung bei der theoretischen Arbeit und dem Aufbau des physikalischen Modells, sondern auch für die guten Arbeitsbedingungen, die diese Arbeit ermöglichten.

Dank schulde ich auch Herrn Prof. Dr.-Ing. F.H. Schroeder für das Zweitgutachten, die vielen wichtigen Hinweise und seine Hilfe bei der Darstellung der Theorie.

Danken möchte ich auch Frau Dora Lenkeit für das Schreiben der Arbeit einschließlich der Gleichungen.

Danken möchte ich schließlich meiner lieben Frau Renate. Sie hat meine Arbeit stets mitgetragen, auch und besonders dann, wenn es einmal nicht so gut voranging.

Wuppertal im Januar 1986

U. Roth

Zusammenfassung

Differentialwasserschlösser dienen zur Reduzierung von Druckspitzen nach Regelungen des Durchflusses in langen Rohrleitungen, wobei durch geeignete Abstimmung der Bauwerksabmessungen die entstehenden Massenschwingungen einen besonders günstigen Verlauf nehmen können.
Es wird ein mathematisches Modell entwickelt, mit dem die Schwingungsverläufe in allen Bauformen von Differentialwasserschlössern für beliebige Regelungen berechnet werden können.
Dazu wird die Geometrie des schwingungsfähigen Systems durch wenige dimensionslose Parameter in ein System von Differentialgleichungen eingeführt. Mit Hilfe eines Großrechners werden anhand dieses Gleichungssystems Parameterstudien betrieben und die Ergebnisse graphisch dargestellt und diskutiert.
Am Beispiel einer Wasserkraftanlage mit druckseitigem einfachem Differentialwasserschloß werden bei Variation der Geometrie des Systems die Schwingungsverläufe für folgende Schaltfälle untersucht:

- plötzliches Schließen
- plötzliches Öffnen
- plötzliches Öffnen mit Regelung auf konstante Leistung
- plötzliches Schließen mit anschließendem plötzlichen Öffnen zum ungünstigsten Zeitpunkt
- plötzliches Öffnen mit anschließendem plötzlichen Schließen zum ungünstigsten Zeitpunkt

Die ungünstigsten Schaltzeitpunkte für die Mehrfachschaltfälle werden theoretisch abgeschätzt und experimentell durch Variation der Schaltzeitpunkte im mathematischen Modell ermittelt.

Die vorliegenden Rechenergebnisse werden anhand von Literatur und mit Hilfe eines physikalischen Modells verifiziert.
Zur Veranschaulichung enthält die Arbeit ein Beispiel für die Anwendung der vorliegenden Ergebnisse zur Vorbemessung eines Differentialwasserschlosses.

Abstract

Differential surge tanks help to reduce pressure heads due to discharge regulations in long pipes. Their mass oscillations perform very favorable if the structure is proper designed. A mathematical model has been set up, which can be used to calculate tank oscillations due to different regulating conditions in all kinds of surge tank constructions. This model bases on the physical description of the oscillation system by a set of differential equations, in which all geometrical values have been replaced by dimensionless parameters. The numerical influence of these parameters have been studied and discussed and the results are documented in several graphs. Using an example of a water power plant with a headwater differential surge tank, the oscillation behaviour is shown for various dimensions and the following conditions:

- abrupt valve closing
- abrupt valve opening
- abrupt valve opening and regulation for constant power
- abrupt valve closing and abrupt valve opening at the most unfavorable moment
- abrupt valve opening and abrupt valve closing at the most unfavorable moment

The most unfavorable switching moment for multiple switching conditions was determined by evaluating the physical equations and by using the mathematical model for the calculus of variations. The results could be verified with a physical model and they also agree with other published results. An example illustrates the use of the results for the hydraulic design of a differential surge tank.

Inhalt

1. Einleitung 1

1.1 Aufgabe eines Wasserschlosses 1

1.2 Hydraulische Wirkung verschiedener Wasserschloß-Bauformen 2

1.2.1. Schachtwasserschloß 2

1.2.2. Drosselwasserschloß 3

1.2.3. Kammerwasserschloß 4

1.2.4. Differentialwasserschloß 5

1.3. Aufgabenstellung 8

2. Formulierung des Berechnungsansatzes 9

2.1. Ableitung der Grundgleichungen 9

2.1.1. Impuls- und Massenerhaltungsgleichungen 9

2.1.2. Formulierung und Diskussion des Gleichungssystems 12

2.1.3. Änderung der Bezeichnungsweise 13

2.2. Diskussion der Voraussetzungen und Vereinfachungen 14

2.3. Einführung dimensionsloser Parameter 17

3. Anfangsbedingungen und Regelfunktionen 21

3.1. Anfangsbedingungen 21

3.2. Regelfunktionen 21

3.2.1. Regelvorgänge 21

3.2.2. Einfachschaltfälle 22

3.2.3. Mehrfachschaltfälle 23

3.2.4. Stabilität 28

4. Numerische Lösung des Gleichungssystems 32

4.1. Lösungsverfahren 32

4.2. Genauigkeit der Berechnungen 33

4.3. Umfang der Berechnungen 36

4.4. Das Programmsystem SCHLxxx 38

4.5. Auswertung der Ergebnisse 43

4.5.1. Optimierung 43

4.5.2. Graphische Darstellung 44

4.6. Anmerkungen zu den Programmen 45

5. Auswertung der Ergebnisse 46

5.1. Einfluß der Verschlußzeit 46
5.2. Einfachschaltfälle 48
5.3. Mehrfachschaltfälle 57
5.3.1. Bestimmung der maßgeblichen Schaltzeitpunkte 57
5.3.2. Amplituden 61
5.4. Stabilität 64

6. Verifikation der Ergebnisse 69

6.1. Vergleich mit bekannten Daten 69
6.2. Physikalisches Modell 72

7. Anwendungsbeispiel 82

Anlagen:

I. Physikalisches Modell A1
II. Bestimmung der ungünstigsten Schaltzeitpunkte für die Mehrfachschaltfälle A4
III. Amplituden im Lastfall 1 A9
IV. Amplituden im Lastfall 2 A18
V. Bestimmung des ungünstigsten Schaltzeitpunktes für den Lastfall 4 A27
VI. Bestimmung des ungünstigsten Schaltzeitpunktes für den Lastfall 5 A31
VII. Amplituden im Lastfall 4 A35
VIII. Amplituden im Lastfall 5 A44
IV. Mindestfallhöhen nach dem Stabilitätskriterium A53
X. Literaturverzeichnis A57

Formelzeichen:

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	Querschnittsfläche der Triebwasserleitung	m^2
A	Querschnittsfläche des Steigschachtes	m^2
A_1	Querschnittsfläche des Hauptschachtes	m^2
D	Durchmesser der Triebwasserleitung	m
g	Erdbeschleunigung	m/s^2
H	Rohfallhöhe	m
h	Rohfallhöhe	-
H_n	Nettofallhöhe	m
h_v	Bernoulli'sche Verlusthöhe	m
k	Absolute Rauheit	m
L	Länge der Triebwasserleitung	m
m	Masse	kg
p	Druck	N/m^2
Q	Durchfluß	m^3/s
q	Durchfluß	-
s	Koordinate entlang des Weges	m
T	Zeit	s
t	Zeit	-
v	Geschwindigkeit	m/s
x	Unabhängige Variable	-
y	Abhängige Variable	-
$\bar{Z}$	Steigschacht-Koordinate	m
$\bar{z}$	Steigschacht-Koordinate	-
$\bar{Z}_1$	Hauptschacht-Koordinate	m
$\bar{z}_1$	Hauptschacht-Koordinate	-
z	Höhen-Koordinate	m
α	Relativer Querschnitt des Steigschachtes	-
β	Relativer Querschnitt des Hauptschachtes	-
γ	relative Drosselung	-
ε	Parameter für die Eigenschaften der Triebwasserleitung	-
ζ	Verlustbeiwert	-
η	Parameter, allgemein	-
λ	Rohrreibungsverlustbeiwert	-
π	Kreiszahl	-
ρ	Dichte	kg/m^3

Indizes:

Index	Bedeutung
Dr	Drossel
H	Hauptschacht
P	(Power) Turbinen -, Pumpen -
R	Rohrleitung, Triebwasserleitung
S	Steigschacht
s	Schaltung, Schalt -
WS	Wasserschloß
z	Zweite Schaltung für Mehrfachschaltfälle
o	Stationärer Zustand

1. Einleitung

1.1. Aufgabe eines Wasserschlosses

In geschlossenen Rohrleitungen tritt bei einer erzwungenen Änderung des Durchflusses infolge der Massenträgheit auch eine Druckänderung auf, der sog. Druckstoß. Dieser pflanzt sich in Wellen mit Schallgeschwindigkeit durch das Leitungssystem fort und wird an seinen Enden reflektiert. Die Amplitude der Druckänderung wächst mit der Geschwindigkeit der Durchflussänderung und der wirksamen Leitungslänge und kann den Bemessungsdruck erreichen und überschreiten. Zur Sicherung des Systems werden daher möglichst nahe an dem druckstoßerzeugenden Regelorgan Einrichtungen zur Druckabsorption installiert, die bei Wasserkraftanlagen in der Regel als Schwallschächte, sog. Wasserschlösser, ausgebildet werden. Sie nehmen bei Regelvorgängen überschüssiges Wasser auf bzw. speisen Wasser in die Rohrleitung ein, so daß eine Verzögerung der Durchflußänderung erzielt wird. Darüber hinaus wird die Druckwelle an dem freien Wasserspiegel unter Umkehrung des Vorzeichens reflektiert, was zu einer Druckentlastung führt, und es wird nur noch der kurze Leitungsanteil zwischen Wasserschloß und Regelorgan dem vollen Druckstoß ausgesetzt.

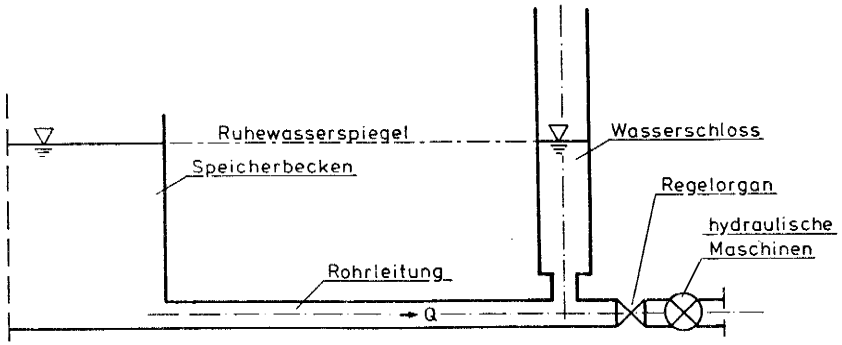


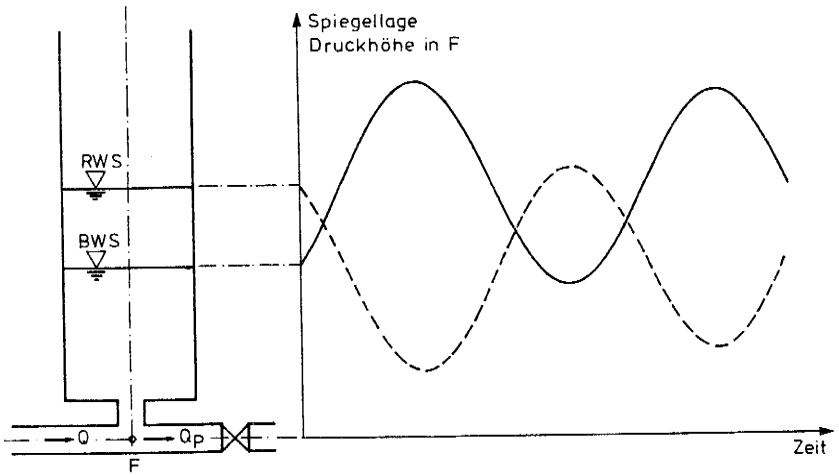
Abb. 1.1: Wasserschloß, System

Unabhängig davon, ob das Wasserschloß druck- oder saugseitig angeordnet ist, induziert jede Regelung der hydraulischen Maschinen einer Wasserkraftanlage eine Änderung der Wasserspiegellage im Wasserschloß, die zu einer Massenschwingung zwischen dem Speicherbecken und dem Wasserschloß führt. Damit wird die für die hydraulischen Maschinen wirksame Fallhöhe verändert, was eine weitere Regelung des Durchflusses auslöst, denn die hydraulischen Maschinen müssen auf konstanter Drehzahl gehalten werden. Die Rückkopplung der Massenschwingung mit der Regelschwingung führt zu erhöhten Schwingungsamplituden und Extremfall zu einer Resonanzerscheinung.
Aus diesen Gründen wird für die Wasserschloßschwingung eine möglichst hohe Dämpfung angestrebt, so daß der Wasserspiegel im Wasserschloß möglichst schnell in die Ruhelage einschwingt, die dem jeweiligen Betriebsfall entspricht.
Eine hohe Dämpfung gewährleistet auch eine hohe Betriebssicherheit bei ungünstigen Schaltkombinationen, wie sie besonders bei Pumpspeicherwerken zu erwarten sind.

1.2. Hydraulische Wirkung verschiedener Wasserschloß-Bauformen

1.2.1. Schachtwasserschloß

Die einfachste Bauform ist das Schachtwasserschloß; es besteht aus einem vertikalen oder schrägen Schacht, der auf die Triebwasserleitung aufgesetzt ist. Schachtwasserschlösser werden seit der Jahrhundertwende gebaut, und ihr Schwingungsverhalten läßt sich relativ einfach berechnen (z.B. Stucky [10], Thoma [12]). Die Schwingungsdämpfung wird im wesentlichen durch die Reibungsverluste im durchströmten System bestimmt, die schon im Hinblick auf die Wirtschaftlichkeit der Anlage sehr niedrig sind; sie ist daher nur gering.
Die Druckhöhe im Wasserschloßfußpunkt F folgt der Wasserspiegellage, sofern die Reibungsverluste und die Trägheitskräfte im Wasserschloß außer acht gelassen werden.



——— plötzliches Schließen; $T < 0$: $Q_p = Q = Q_o$
$T > 0$: $Q_p = 0$

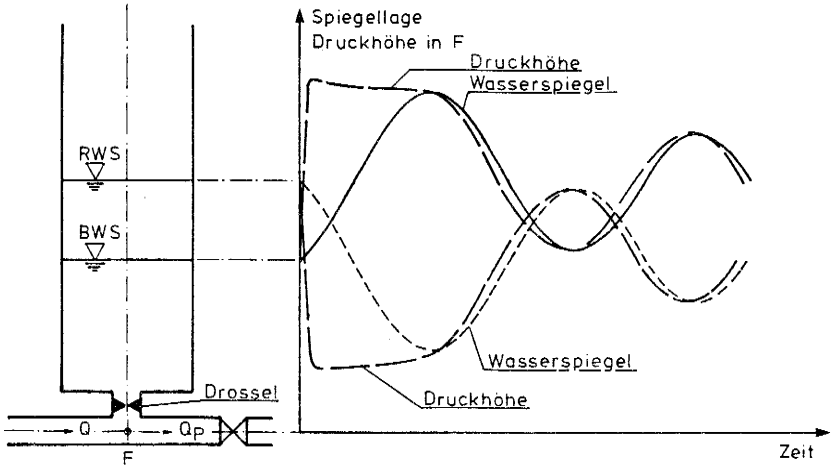
--------- plötzliches Öffnen: $T < 0$: $Q_p = Q = 0$
$T > 0$: $Q_p = Q_o$

Abb. 1.2: Zeitlicher Verlauf der Wasserspiegellage und der Druckhöhe im Wasserschloßfußpunkt beim ungedämpften druckseitigen Schachtwasserschloß

1.2.2. Drosselwasserschloß

Zur Verbesserung der Schwingungsdämpfung kann am Fußpunkt des Wasserschlosses ein hydraulischer Widerstand, eine sog. Drossel, eingebaut werden. Die Reibungsverluste im Rohrsystem bleiben unverändert, lediglich die Strömungsverluste im Einlauf zum Wasserschloß werden vergrößert, so daß sich der Massenaustausch zwischen Rohrsystem und Wasserschloß verringert. Dadurch wird die Auslenkung des Wasserspiegels reduziert und die Druckamplituden am Wasserschloßfußpunkt erhöht.
Die druckstoßmindernde Wirkung der Druckwellenreflektion an der freien Wasseroberfläche des Wasserschlosses wird durch die Drossel reduziert. An der Drossel tritt eine Teilreflektion der Druckwellen ohne Vorzeichenumkehr auf, was zu einer Erhöhung

der Druckstoßamplituden gegenüber einem ungedrosselten Wasserschloß und zu einer Einbeziehung des gesamten Rohrsystems in den Druckstoßvorgang führt. Diese Einflüsse bilden begrenzende Randbedingungen für die Bemessung der Drossel und limitieren die erreichbare Dämpfung.



——— plötzliches Schließen
--------- plötzliches Öffnen

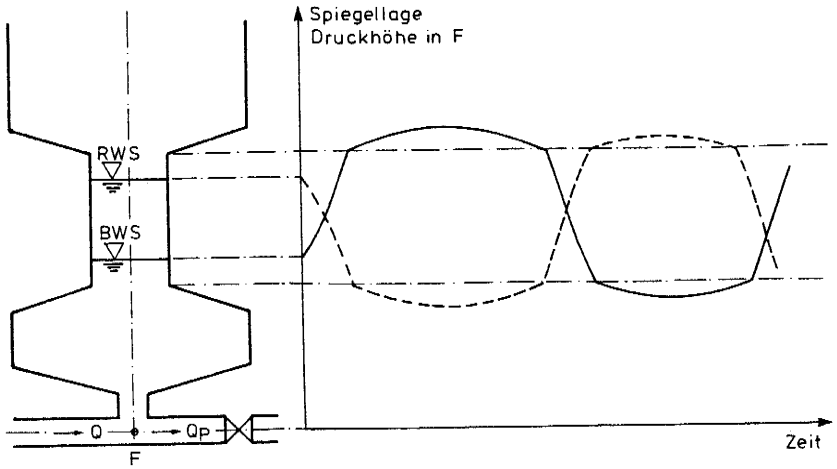
Abb. 1.3: Zeitlicher Verlauf der Wasserspiegellage und der Druckhöhe im Wasserschloßfußpunkt beim gedrosselten druckseitigen Wasserschloß

1.2.3. Kammerwasserschloß

Zur Verminderung der Schwingungsamplituden ohne Reduzierung des Volumenstroms durch eine Drossel eignen sich Kammern oder Querschnittsaufweitungen. Die Schwingung im Kammerwasserschloß ähnelt der im Schachtwasserschloß, allerdings wird sie in den Bereichen, wo sich der Wasserspiegel in einer Kammer befindet, entlang der Zeitachse aufgespreizt. Es ergibt sich eine Verringerung der Amplituden und eine Verlängerung der Periode.

Die Anordnung von Kammern ist oft notwendig, um die Bauwerks-

abmessungen zu begrenzen, obwohl die Verlängerung der Periode sich ungünstig auf den Betrieb der Wasserkraftanlage auswirkt.



——— plötzliches Schließen
--------- plötzliches Öffnen

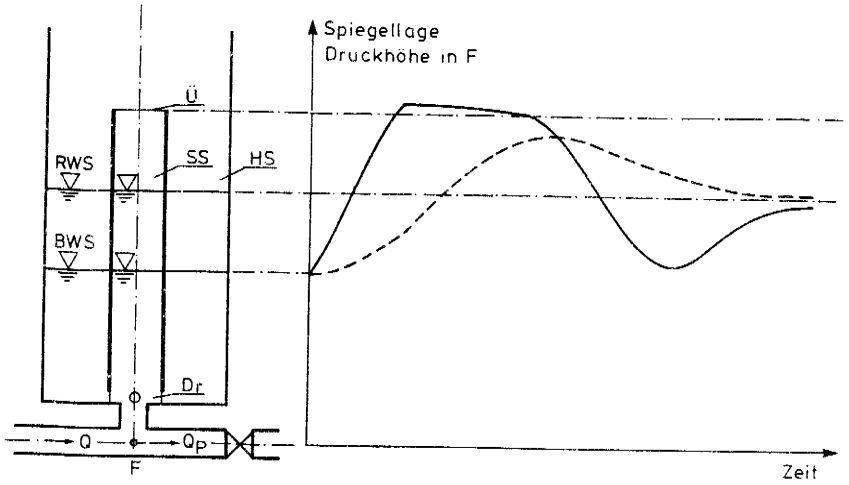
Abb. 1.4: Zeitlicher Verlauf der Wasserspiegellage und der Druckhöhe im Wasserschloßfußpunkt bei einem druckseitigen Kammerwasserschloß

1.2.4. Differentialwasserschloß

Das Differentialwasserschloß stellt eine Kombination von Schacht- oder Kammer- und Drosselwasserschloß dar. Sein hydraulisches Verhalten ergibt sich demnach aus der Überlagerung der Einzelwirkungen, wobei es möglich sein sollte, die Vorteile der einzelnen Bauformen zu kombinieren.

Das Prinzip des Differentialwasserschlosses ist bereits 1914 von Raymond D. Johnson [4] ausführlich beschrieben worden. Er schlägt ein gedrosseltes Wasserschloß vor, in dessen Zentrum ein ungedrosseltes Zentralrohr, der sog. Steigschacht, eingebaut wird. Dieses Zentralrohr ist ein Schachtwasserschloß mit geringem Querschnitt, das in der Lage ist, direkt auf Druck-

schwankungen im Leitungssystem zu reagieren. Der sog. Hauptschacht, der das Zentralrohr umgibt, wird von unten durch die gedrosselte Öffnung und von oben über den Überfallrand des Steigschachtes beaufschlagt. Die Wirkungsweise des Differentialwasserschlosses besteht darin, daß sich in dem System Speicherbecken - Steigschacht eine freie Massenschwingung vergleichbar der im Schachtwasserschloß ausbildet, der eine zweite Massenschwingung zwischen Steig- und Hauptschacht überlagert wird. Der Überfall begrenzt die Steigschacht-Amplitude nach oben ähnlich wie eine Oberkammer, führt jedoch das Wasser in den Hauptschacht über, so daß beim Abschwingen diese Masse nicht mehr zur Beschleunigung der Wassersäule zur Verfügung steht. Dem gekoppelten Schwingungszustand wird sowohl beim Eintauchen des Überfallstrahls in den Hauptschacht als auch beim Massenaustausch zwischen Haupt- und Steigschacht durch die Drossel kinetische Energie entzogen.



———— Steigschacht, Druckhöhe in F
- - - - - - - - Hauptschacht

Abb. 1.5: Zeitlicher Verlauf der Wasserspiegellagen und der Druckhöhe im Wasserschloßfußpunkt bei einem druckseitigen Differentialwasserschloß nach Johnson bei plötzlichem Schließen

Die große Dämpfung der Schwingungsamplituden im Differentialwasserschloß beruht aber nicht allein auf dieser Energieumwandlung, vielmehr kann durch geeignete Abstimmung der Bauwerksabmessungen erreicht werden, daß die Überlagerung der Schwingungen in den beiden Systemen zur völligen Auslöschung der Amplituden führt.

1.3. Aufgabenstellung

Trotz der offensichtlichen Vorteile der Differentialwasserschlösser sind sie bis in die jüngste Vergangenheit kaum ausgeführt worden, weil ihre hydraulische Bemessung und die Berechnung der Schwingungsvorgänge außerordentlich schwierig ist und erst auf modernen Großrechnern rationell durchgeführt werden kann.
Johnson gibt zwar ein einfaches Bemessungsverfahren an, das aber nicht zu den erhofften Erfolgen geführt hat. Er setzt für seine Bemessung voraus, daß die extremen Wasserspiegellagen beider Schächte für den Bemessungslastfall gerade übereinstimmen. Diese Voraussetzung wurde erstmalig 1975 von Morgenstern [8] aufgegeben. Er forderte als Bemessungskriterium vielmehr die totale Dämpfung der Schwingungen innerhalb der ersten Periode und untersuchte das Schwingungsverhalten von Differentialwasserschlössern unter diesem Gesichtspunkt für den Betriebsfall plötzliches vollkommenes Schließen.
Als ein weiteres Bemessungskriterium ist die Stabilität der Schwingungen bei Regelung auf konstante Leistung anzusehen. Der von Thoma [12] für das Schachtwasserschloß entwickelte Stabilitätsnachweis, der in der Regel auch für Kammer- und Drosselwasserschlösser herangezogen wird, führt bei Differentialwasserschlössern zu unwirtschaftlichen Konstruktionen.
Heinl [3] hat die Stabilität für Differentialwasserschlösser untersucht und gibt Entscheidungskriterien für ihre Bemessung an.
Mit diesen beiden Arbeiten ist das Differentialwasserschloß wieder in den Mittelpunkt des Interesses gerückt worden. Nachdem Vorbemessungen möglich geworden sind, muß eine möglichst wirtschaftliche Bemessung angestrebt werden, wobei der Nachweis

der Betriebssicherheit einer Wasserkraftanlage unter tatsächlichen Betriebsbedingungen erfolgen muß.
Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Verfahren erarbeitet werden, das sowohl die hydraulische Bemessung aller Bauteile und Konstruktionsvarianten des Differentialwasserschlosses für die Einfachschaltfälle als auch den Nachweis der Betriebssicherheit hinsichtlich der Stabilität und insbesondere für Mehrfachschaltfälle ermöglicht.

2. Formulierung des Berechnungsansatzes

2.1. Ableitung der Grundgleichungen

2.1.1. Impuls- und Massenerhaltungsgleichungen

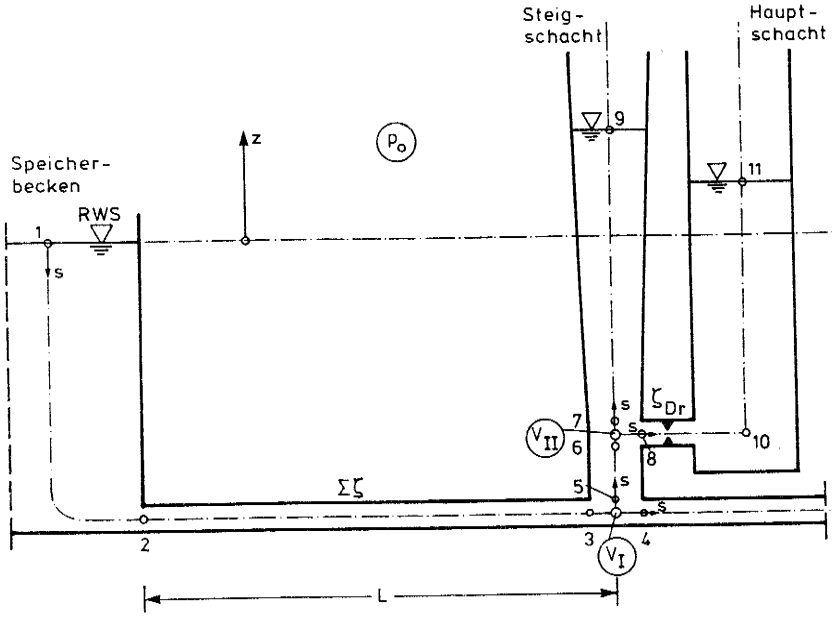


Abb. 2.1: Differentialwasserschloss, System

Die erweiterte Bernoulli-Gleichung für eine inkompressible Flüssigkeit lautet für eine instationäre Strömung zwischen den Punkten ① und ③ (Schroeder [9], Truckenbrodt [13]):

① - ③:

$$\frac{\dot{s}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{\dot{s}_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho \cdot g} + z_3 + h_{v1-3} + \frac{1}{g} \cdot \dot{Q}_3 \cdot \int_{s_1}^{s_3} \frac{ds}{A(s)} \qquad (2.1)$$

Es wird vorausgesetzt, daß der Wasserspiegel des Oberbeckens sehr groß ist gegenüber dem konstanten Querschnitt A_3 der Triebwasserleitung. Dann gilt der quadratische Verlustansatz nach Prandtl in der Form

$$h_{v1-3} = (\Sigma\zeta_i + \lambda\cdot\frac{L}{D})\cdot\frac{\dot{s}_3\cdot|\dot{s}_3|}{2g} = \Sigma\zeta\cdot\frac{\dot{s}_3\cdot|\dot{s}_3|}{2g} \qquad (2.2)$$

und man kann die obige Bernoulli-Gleichung mit $\dot{s}_3 = Q_3/A_3$ vereinfachen zu:

$$\frac{p_o}{\rho\cdot g} = \frac{Q_3^2}{2g\cdot A_3^2} + \frac{p_3}{\rho\cdot g} + z_3 + \Sigma\zeta\cdot\frac{Q_3\cdot|Q_3|}{2g\cdot A_3^2} + \frac{1}{g}\cdot\dot{Q}_3\cdot\frac{a}{L} \qquad (2.3)$$

Wird weiter vorausgesetzt, daß $\Sigma\zeta >> 1$ ist, so läßt sich diese Gleichung weiter vereinfachen:

$$\frac{p_o}{\rho\cdot g} = \frac{p_3}{\rho\cdot g} + z_3 + \Sigma\zeta\cdot\frac{Q_3\cdot|Q_3|}{2g\cdot A_3^2} + \frac{1}{g}\cdot\dot{Q}_3\cdot\frac{a}{L} \qquad (2.4)$$

Analog gilt zwischen den Punkten (5) und (6):

(5) - (6):

$$\frac{\dot{s}_5^2}{2g} + \frac{p_5}{\rho\cdot g} + z_5 = \frac{\dot{s}_6^2}{2g} + \frac{p_6}{\rho\cdot g} + z_6 + h_{v5-6} + \frac{1}{g}\cdot\dot{Q}_6\cdot\int_{s_5}^{s_6}\frac{ds}{A(s)} \qquad (2.5)$$

Wird vorausgesetzt, daß der Querschnitt A(s) in dem sehr kurzen Bereich konstant ist, so ergibt sich unter Vernachlässigung der Reibungsverluste:

$$\frac{p_5}{\rho\cdot g} + z_5 = \frac{p_6}{\rho\cdot g} + z_6 \qquad (2.6)$$

Zwischen den Punkten (7) und (9) gilt:

(7) - (9):

$$\frac{\dot{s}_7}{2g} + \frac{p_7}{\rho\cdot g} + z_7 = \frac{\dot{s}_9}{2g} + \frac{p_9}{\rho\cdot g} + z_9 + h_{v7-9} + \frac{1}{g}\cdot\dot{Q}_9\cdot\int_{s_7}^{s_9}\frac{ds}{A(s)} \qquad (2.7)$$

Die Länge des Steigschachtes ist sehr gering gegenüber der Triebwasserleitung. Ebenso sind die Reibungsverluste im Steigschacht gering. Wird vorausgesetzt, daß der Querschnitt A(s) nur geringfügig veränderlich ist, so läßt sich die Gleichung (2.7) wie folgt vereinfachen:

$$\frac{p_7}{\rho\cdot g} + \cancel{z_7} = \frac{p_o}{\rho\cdot g} + \cancel{z_7} + s_9 \qquad (2.8)$$

Zwischen den Punkten (8) und (11) gilt:

(8) - (11):

$$\frac{\dot{s}_8^2}{2g} + \frac{p_8}{\rho\cdot g} + z_8 = \frac{\dot{s}_{11}^2}{2g} + \frac{p_{11}}{\rho\cdot g} + z_{11} + h_{v8-11} + \frac{1}{g}\cdot\dot{Q}_{11}\cdot\int_{s_8}^{s_{11}}\frac{ds}{A(s)} \qquad (2.9)$$

Die Länge des Hauptschachtes ist sehr gering gegenüber der der Triebwasserleitung. Sein Querschnitt ist konstant und größer als der des Steigschachtes. Da außerdem der Durchfluß Q_{11} infolge der Drossel gering ist, sind die Durchflußgeschwindigkeiten klein.
Die Strecke (8) - (10) sei sehr kurz gegenüber der Strecke (10) - (11).
Wird der Verlustbeiwert ζ_{Dr} auf den Querschnitt A_3 der Triebwasserleitung bezogen, so läßt sich die obige Gleichung wie folgt anschreiben:

$$\frac{p_8}{\rho\cdot g} + \cancel{z_8} = \frac{p_o}{\rho\cdot g} + \cancel{z_8} + s_{11} - s_{10} + \zeta_{Dr}\cdot\frac{A_{11}^2}{A_3^2}\cdot\frac{\dot{s}_{11}\cdot|\dot{s}_{11}|}{2g} \qquad (2.10)$$

In den Verzweigungspunkten V_I und V_{II} sind folgende Kontinuitätsgleichungen erfüllt:

V_I :

$$-Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0 \qquad (2.11)$$

V_{II}:

$$-Q_6 + Q_7 + Q_8 = 0 \qquad (2.12)$$

Da die Durchflüsse in den Stetigkeitsbereichen jeweils konstant sind, ergibt sich daraus mit $Q_5 = Q_6$; $Q_7 = Q_9$ und $Q_8 = Q_{11}$:

$$-Q_3 + Q_4 + \dot{s}_9\cdot A_9(s_9) + \dot{s}_{11}\cdot A_{11} = 0 \qquad (2.13)$$

2.1.2. Formulierung und Diskussion des Gleichungssystems

Mit der näherungsweisen Annahme, daß die Drücke in den Verzweigungspunkten V_I und V_{II} allseits gleich sind, können die Gleichungen (2.4), (2.6), (2.8) und (2.1o) sowie (2.13) zu dem folgenden Differentialgleichungssystem zusammengefaßt werden:

$$z_7 + s_9 + \Sigma\zeta \cdot \frac{Q_3 \cdot |Q_3|}{2g \cdot A_3^2} + \frac{a}{g \cdot L} \cdot \dot{Q}_3 = 0 \qquad (2.14)$$

$$(s_{11} - s_{1o}) - s_9 + \zeta_{Dr} \cdot \frac{A_{11}^2}{A_3^2} \cdot \frac{\dot{s}_{11} \cdot |\dot{s}_{11}|}{2g} = 0 \qquad (2.15)$$

$$- Q_3 + Q_4 + \dot{s}_9 \cdot A_9(s_9) + \dot{s}_{11} \cdot A_{11} = 0 \qquad (2.13)$$

Es handelt sich dabei um ein nichtlineares gewöhnliches System von drei Differentialgleichungen für vier Zeitfunktionen, nämlich die Spiegellagen s_9 und s_{11} und die Durchflüsse Q_3 und Q_4. Das Gleichungssystem ist also unbestimmt.
Der Durchfluß der hydraulischen Maschinen Q_4 wird als bekannte Regelfunktion eingeführt, so daß das Gleichungssystem bei Vorgabe von Anfangswerten gelöst werden kann.
Wegen der Nichtlinearität des Systems ist eine geschlossene Lösung nicht möglich. Zur Berechnung der Schwingungszustände wird daher ein schrittweises Verfahren verwendet.

Die erste Gleichung (2.14) besagt, daß die Änderung des Durchflusses der Triebwasserleitung Q_3 aus der Spiegellage im Steigschacht und den Reibungsverlusten in der Leitung resultiert.
Der zweiten Gleichung (2.15) ist zu entnehmen, daß die Verlusthöhe an der Drossel gleich der Differenz der Spiegellagen in den Wasserschloßschächten ist.
Die dritte Gleichung (2.13) ist die Kontinuitätsgleichung für das ganze System.

2.1.3. Änderung der Bezeichnungsweise

Wegen der einfacheren Schreibweise und der Übereinstimmung mit der Literatur erweist es sich als sinnvoll, neue Bezeichnungen nach der Abbildung 2.2 einzuführen:

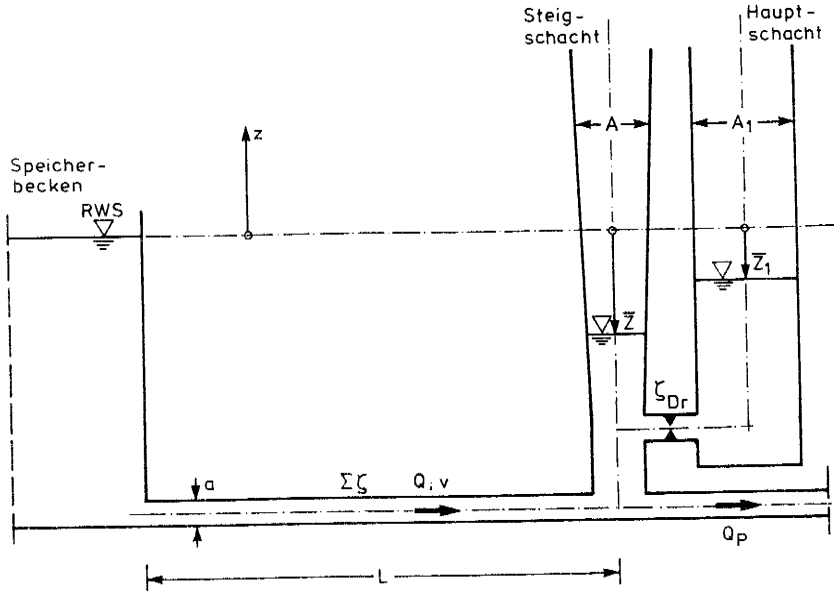


Abb. 2.2: Neue Bezeichnungen

Im einzelnen ergeben sich folgende Änderungen:

bisher	s_9	s_{11}	Q_3	Q_4	A_3	A_9	A_{11}	$\dot{s}_9$	$\dot{s}_{11}$
neu	$-\bar{Z} - z_7$	$-\bar{Z}_1 - z_8 + s_{1o}$	Q	Q_P	a	A	A_1	$-\frac{d\bar{Z}}{dT}$	$-\frac{d\bar{Z}_1}{dT}$

Tab. 2.1: Änderung der Bezeichnungen

Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\Sigma\zeta\cdot\frac{Q\cdot|Q|}{2g\cdot a^2} - \bar{z} + \frac{a}{g\cdot L}\cdot\frac{dQ}{dT} = 0 \qquad (2.16)$$

$$-\bar{z}_1 + \bar{z} - \frac{\zeta_{Dr}}{2g}\cdot\frac{A_1^2}{a^2}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{dT}\cdot\left|\frac{d\bar{z}_1}{dT}\right| = 0 \qquad (2.17)$$

$$-Q + Q_P - \frac{d\bar{z}}{dT}\cdot A - \frac{d\bar{z}_1}{dT}\cdot A_1 = 0 \qquad (2.18)$$

Die Variablen werden auf ihre stationären Zustände bezogen:

$$\bar{z}_i = \bar{z}_i/\bar{z}_o \quad ; \quad q_i = Q_i/Q_o \quad ; \quad t = T/T_o \qquad (2.19)$$

mit

$$\bar{z}_o = \Sigma\zeta\cdot\frac{Q_o^2}{2g\cdot a^2} = \Sigma\zeta\cdot\frac{v_o^2}{2g} \qquad (2.20)$$

Es ergibt sich nach Umstellung:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\Sigma\zeta\cdot v_o\cdot T_o}{2\cdot L}\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|) \qquad (2.21)$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{T_o\cdot 2g\cdot a}{\Sigma\zeta\cdot v_o\cdot A}\cdot(q_P - q) - \frac{A_1}{a}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{dt} \qquad (2.22)$$

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{T_o\cdot 2g\cdot a}{\Sigma\zeta\cdot v_o\cdot A_1}\cdot\sqrt{\frac{\Sigma\zeta}{\zeta_{Dr}}\cdot|\bar{z} - \bar{z}_1|}\cdot\mathrm{sign}(\bar{z} - \bar{z}_1) \qquad (2.23)$$

Mit diesem Differentialgleichungssystem werden die Bewegungsvorgänge im Differentialwasserschloss vollständig beschrieben.

2.2. Diskussion der Voraussetzungen und Vereinfachungen

Auf die Massenschwingungen im Wasserschloß haben die Elastizitäten des Wassers und der Wandungen keinen Einfluß. Deshalb werden die Wandungen als starr und die Dichte ρ des Wassers als konstant angesehen.

Die kontinuierlichen und örtlichen Verluste werden mit dem quadratischen Verlustansatz bestimmt, der für stationäre Bewegungsvorgänge aufgestellt wurde und mit empirischen Daten belegt ist. Tatsächlich unterliegen aber alle Verluste dem instationären Bewegungsvorgang. Die hierbei auftretenden Energiedissipationen sind bis heute im wesentlichen unerforscht, so daß Berechnungsansätze fehlen, die in das Gleichungssystem (2.21) bis (2.23) eingeführt werden könnten. Köngeter [5] und Krüger [6] haben gezeigt, daß die stationären Verlustparameter kleinere Zahlenwerte haben, als sie der instationäre Strömungszustand besonders im Bereich kleiner Geschwindigkeiten hervorbringt. Hinsichtlich der örtlichen Verluste in der Triebwasserleitung, die für die Dämpfung relevant sind, bedeutet das, daß eine konservative Bemessung vorliegt, und in der Naturausführung höhere Dämpfungen auftreten werden.
Die örtlichen Verluste in der Drossel weichen in der Realität ebenfalls von der Berechnung ab. Das bedeutet, daß die Überlagerung der Schwingungen im Differentialwasserschloß nur mit einer gewissen Ungenauigkeit berechnet werden kann.
Für die kontinuierlichen Verluste wird der Verlustbeiwert λ für den stationären Zustand berechnet und im weiteren Verlauf der Berechnung konstant gehalten. Für den Betriebsfall "Schließen" ist diese Vereinfachung zu ungünstig; auch hier sind in der Naturausführung höhere Dämpfungen zu erwarten. Für den Betriebsfall "Öffnen" sind die Abweichungen im Bereich hoher Reynolds-Zahlen und geringer Rauheiten gering, zudem hat die Veränderung des Verlustbeiwertes während der Schwingung ein alternierendes Vorzeichen, so daß ein gewisser Ausgleich stattfindet.
Eine weitere Vereinfachung, die das Reibungsverhalten im mathematischen Modell betrifft, ist die Vernachlässigung der Geschwindigkeitshöhe in der Triebwasserleitung. Es wird dabei vorausgesetzt, daß der Gesamt-Verlustbeiwert $\Sigma\zeta$ sehr groß ist gegenüber eins. Dies wird bei Wasserkraftanlagen mit Wasserschloß in der Regel der Fall sein, da lange Triebwasserleitungen relativ hohe Reibungsverluste haben.

Die Reibungsverluste im Wasserschloß, mit Ausnahme der Verluste in der Drossel, sind klein gegenüber denen in der Triebwasserleitung und werden vernachlässigt. Nach der Gleichung (2.2) wachsen die kontinuierlichen Verluste linear mit der Leitungslänge und verringern sich mit der fünften Potenz des Leitungsdurchmessers:

$$h_v = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \qquad (2.2a)$$

Für das System Wasserschloß-Triebwasserleitung gilt immer $L >> l_W$ und in der Regel auch $a < A$, so daß der Anteil der Verluste im Wasserschloß an den Gesamtverlusten stets sehr gering ist und das Schwingungsverhalten nicht beeinflußt. Im übrigen führt auch diese Vernachlässigung zu ungünstigeren Ergebnissen, als die Natur sie liefern würde.
Bezüglich der Vernachlässigung der Reibungsverluste in den Wasserschloß-Schächten ist zu bemerken, daß die Verluste an der Drossel bei ausgeprägter Differentialwirkung stets noch wesentlich größer sind als die Gesamtverluste in der Triebwasserleitung. Die Ein- und Auslaufverluste des Verbindungsstollens zwischen den Schächten sind in dem Verlustbeiwert ζ_{Dr} der Drossel enthalten.

Für die Abschätzung der Trägheitskräfte im Wasserschloß können die gleichen Überlegungen wie für die Abschätzung der Reibungskräfte herangezogen werden. Die wirksamen Längen sind sehr gering, die Querschnitte groß gegenüber der Triebwasserleitung. Heinl [3] hat durch punktweise Überprüfung gezeigt, daß sich der erhebliche Mehraufwand bei der Berücksichtigung der Trägheitskräfte nicht rechtfertigen läßt, zumal dies die zusätzliche Berücksichtigung der tatsächlichen Schaltzeiten voraussetzen würde.

Die Differenzen der Geschwindigkeitshöhen zwischen Haupt- und Steigschacht einerseits und dem Wasserspiegel und dem Fußpunkt im Steigschacht andererseits können ebenfalls vernachlässigt werden. Bedingt durch die großen Querschnitte sind die Geschwindigkeiten so gering, daß die Geschwindigkeitshöhen um mehrere Größenordnungen kleiner sind als die Größen, die das Schwingungsverhalten prägen.

Die weiteren Voraussetzungen sind eine große Spiegeloberfläche des Speicherbeckens, deren Lage als konstant angesehen wird und eine konstante Querschnittsfläche a der Triebwasserleitung zwischen Speicherbecken und Wasserschloß. Die Eigenschaften der Triebwasserleitung zwischen dem Wasserschloß und den hydraulischen Maschinen gehen nicht in die Berechnung ein.

Alle Untersuchungen werden am Beispiel einer Wasserkraftanlage mit druckseitigem Wasserschloß durchgeführt. Die Ergebnisse lassen sich jedoch ohne weiteres auf saugseitige Wasserschlösser übertragen.

Zu den Vereinfachungen und Voraussetzungen ist abschließend zu sagen, daß bei Bedarf detaillierte Untersuchungen für den einzelnen Fall durchgeführt werden können. Es stellt kein grundsätzliches Problem dar, das mathematische Modell auf eine bestimmte Anlage abzustimmen, bei der die eine oder andere Voraussetzung einmal nicht gegeben sein sollte.

2.3. Einführung dimensionsloser Parameter

Um die Anzahl der bei Parameterstudien zu variierenden Größen auf ein Minimum zu reduzieren, ist es sinnvoll, dimensionslose Parameter einzuführen, die die Eigenschaften des schwingungsfähigen Systems in allgemeiner Form beschreiben. Dazu muß eine über die Zeit konstante Bezugszeit T_o gewählt werden. Es wird zunächst gesetzt:

$$\bar{T}_o = \frac{\Sigma\zeta \cdot v_o}{2g} \qquad (2.24)$$

Damit vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem (2.21) bis (2.23) zu:

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} = (\Sigma\zeta \cdot v_o)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot g \cdot L} \cdot (\bar{z} - q \cdot |q|) \qquad (2.25)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{a}{A} \cdot (q_p - q) - \frac{A_1}{A} \cdot \frac{d\bar{z}_1}{d\bar{t}} \qquad (2.26)$$

$$\frac{d\bar{z}_1}{d\bar{t}} = \sqrt{\frac{\Sigma\zeta}{\zeta_{Dr}}}\cdot\frac{a}{A_1}\cdot\sqrt{|\bar{z} - \bar{z}_1|}\cdot \mathrm{sign}(\bar{z} - \bar{z}_1) \tag{2.27}$$

Es werden folgende dimensionslose Parameter gewählt:

- für die Geometrie der Triebwasserleitung:

$$\varepsilon = (\Sigma\zeta\cdot v_o)^2\cdot\frac{1}{4\cdot g\cdot L} \tag{2.28}$$

- für den Querschnitt des Steigschachtes:

$$\alpha = \frac{a}{A} \tag{2.29}$$

- für den Querschnitt des Hauptschachtes:

$$\beta = \frac{a}{A_1} \tag{2.30}$$

- für die Stärke der Drosselung:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Sigma\zeta}{\zeta_{Dr}}} \tag{2.31}$$

Damit erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{dq}{d\bar{t}} = \varepsilon\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|) \tag{2.32}$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \alpha\cdot(q_p - q - \frac{1}{\beta}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{d\bar{t}}) \tag{2.33}$$

$$\frac{d\bar{z}_1}{d\bar{t}} = \beta\cdot\gamma\cdot\sqrt{|\bar{z} - \bar{z}_1|}\cdot \mathrm{sign}(\bar{z} - \bar{z}_1) \tag{2.34}$$

Mit diesem Differentialgleichungssystem lassen sich alle Bauformen von Differentialwasserschlössern berechnen. Es eignet sich insbesondere auch zur Berechnung von Differentialwasserschlössern mit Kammern am Steigschacht, die zur Begrenzung der Amplituden notwendig sein können. In diesem Fall muß der Steigschacht-Parameter α als Funktion der Wasserspiegellage $\bar{z}$ bzw. der Zeit $\bar{t}$ aufgefaßt werden, wie es Meyer [7] für den Spezialfall von

Kammerwasserschlössern durchgeführt hat.

Für Differentialwasserschlösser mit konstantem Steigschacht-Querschnitt läßt sich dieses Gleichungssystem weiter vereinfachen. Mit der neuen Bezugszeit

$$T_o = \frac{\Sigma\zeta\cdot v_o}{2g}\cdot\frac{A}{a} \tag{2.35}$$

ergibt sich

$$\frac{dq}{d\bar{t}} = \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|) \tag{2.36}$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = q_p - q - \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{d\bar{t}} \tag{2.37}$$

$$\frac{d\bar{z}_1}{d\bar{t}} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\gamma\cdot\sqrt{|\bar{z} - \bar{z}_1|}\cdot \mathrm{sign}(\bar{z} - \bar{z}_1) \tag{2.38}$$

Dieses Differentialgleichungssystem enthält nur noch drei Parameter, die die Eigenschaften des schwingungsfähigen Systems vollständig beschreiben, und zwar

- für das System Triebwasserleitung-Steigschacht:

$$\varepsilon/\alpha = (\Sigma\zeta\cdot v_o)^2\cdot\frac{1}{4\cdot g\cdot L}\cdot\frac{A}{a} \tag{2.39}$$

- für den Querschnitt des Hauptschachtes:

$$\beta/\alpha = \frac{A}{A_1} \tag{2.40}$$

- und für die Stärke der Drosselung wie bisher

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Sigma\zeta}{\zeta_{Dr}}} \tag{2.31}$$

Diese Parameter wurden so gewählt, daß die verschiedenen Aspekte der Konstruktion sauber voneinander getrennt werden. Ihre Definitionsbereiche und die Eigenschaften des Systems an den Grenzen der Definitionsbereiche sind in der Tabelle 2.2 zusammengestellt:

Parameter η	Definitions-bereich	$\eta \to 0$	$\eta \to \infty$
ε ε/α	> 0	Reibung $\to 0$	Trägheit $\to 0$
α	> 0	$A \to \infty$	$A \to 0$; Drossel-wasserschloß; Querschnitt A_1; mit Standrohr
β β/α	> 0	$A_1 \to \infty$	$A_1 \to 0$; Schacht-wasserschloß; Querschnitt A
γ	> 0	$\zeta_{Dr} \to \infty$ Schacht-wasserschloß; Querschnitt A	$\zeta_{Dr} \to 0$ Schacht-wasserschloß; Querschnitt $A+A_1$

Tab. 2.2: Definitionsbereiche der dimensionslosen Parameter

3. Anfangsbedingungen und Regelfunktionen

3.1. Anfangsbedingungen

In dem System Triebwasserleitung - Wasserschloß sind grundsätzlich zwei stationäre Zustände denkbar, die als Anfangsbedingungen in die Berechnung eingehen:
Der Ruhezustand ist dadurch gekennzeichnet, daß sich das Wasser in dem System in Ruhe befindet. Die Wasserspiegel im Differentialwasserschloß liegen auf der Höhe der Oberfläche des Speicherbeckens. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} Q = Q_P = 0 \quad ; \quad \bar{Z} = \bar{Z}_1 = 0 & \text{für } T < 0 \\ q = q_P = \bar{z} = \bar{z}_1 = 0 & \text{für } t < 0 \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

Der Betriebszustand liegt dann vor, wenn die Durchflüsse in den Triebwasserleitungen dem stationären Durchfluß Q_o entsprechen. Die Wasserspiegel im Differentialwasserschloß liegen um die Verlusthöhe $\bar{Z}_o$ niedriger als die Oberfläche des Speicherbeckens. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} Q = Q_P = Q_o \quad ; \quad \bar{Z} = \bar{Z}_1 = Z_o & \text{für } T < 0 \\ q = q_P = \bar{z} = \bar{z}_1 = 1 & \text{für } t < 0 \end{array}\right\} \quad (3.2)$$

3.2. Regelfunktionen

3.2.1. Regelvorgänge

Der Durchfluß Q_P wird durch ein Regelorgan geregelt, das sich zwischen dem Wasserschloß und den hydraulischen Maschinen befindet. Die Regelung wird als vorgegebene Funktion $q_P = q_P(t)$ in die Gleichung (2.33) bzw. (2.37) als Regelfunktion eingeführt. Diese Regelfunktion wird für jeden Regelvorgang formuliert, und zwar sowohl für Einzelregelungen wie "öffnen" oder "Schließen" als auch für Mehrfachregelungen. Jede Regelung erfolgt nach einem Gesetz, das durch die Bauform und Konstruktion des Regelorgans bedingt ist, innerhalb eines Zeitraumes, der durch die zulässigen Druckamplituden am Regelorgan vorgegeben wird. Dieses Schließgesetz ist von Anlage zu Anlage verschieden

und für den Einzelfall bekannt, so daß es in die Regelfunktion eingeführt werden kann. Es ist aber nicht sinnvoll, bei allgemeinen Untersuchungen von Differentialwasserschlössern exakte Schließgesetze zu berücksichtigen, weil dadurch die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse verloren ginge bzw. die Anzahl der durchzuführenden Berechnungen unübersehbar würde. Es wird daher mit einem vereinfachten linearen Schließgesetz gerechnet oder die Verschlußzeit T_s, während der das Regelorgan sich öffnet oder schließt, auf Null reduziert. In beiden Fällen wird im Hinblick auf die Verschiedenartigkeit der tatsächlichen Schließgesetze ein hohes Maß an Allgemeingültigkeit erzielt.

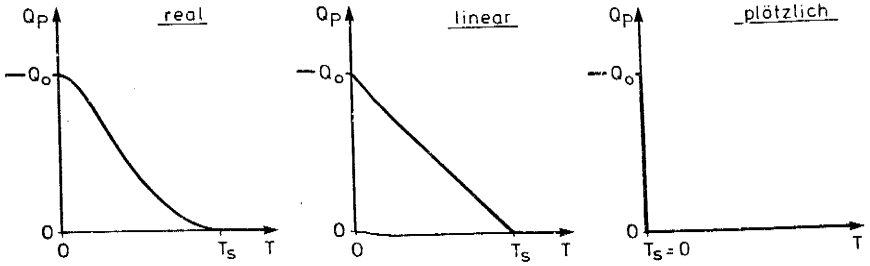


Abb. 3.1: Schließgesetze für den Betriebsfall "Schließen"

3.2.2. Einfachschaltfälle

Einfachschaltfälle sind solche Regelvorgänge, bei denen das System von einem stationären Zustand in den anderen übergeht. Dabei entstehen Massenschwingungen im System, so daß der neue Zustand nur durch den Einfluß der Dämpfung nach einer gewissen Zeit erreicht wird. Es handelt sich um die Schaltfälle "Schließen" und "Öffnen".
Für den Schaltfall "Schließen" gelten die Anfangsbedingungen nach Gleichung (3.2):

$$q = q_p = \bar{z} = \bar{z}_1 = 1 \qquad \text{für } t < 0 \tag{3.2}$$

Bei Berücksichtigung eines linearen Schließgesetzes nach

Abb. 3.1 mit der dimensionslosen Verschlußzeit

$$t_s = \frac{T_s}{T_o} \tag{3.3}$$

gilt die Regelfunktion

$$\left.\begin{aligned} q_p &= 1 - \frac{t}{t_s} && \text{für } 0 \le t < t_s \\ q_p &= 0 && \text{für } t \ge t_s \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Wird für die Verschlußzeit Null eingesetzt, ergibt sich für den Lastfall "plötzliches Schließen" (LF 1) die Regelfunktion

$$q_p = 0 \qquad \text{für } t \ge 0 \tag{3.5}$$

Analog gelten für den Schaltfall "Öffnen" die Anfangsbedingungen nach Gleichung (3.1):

$$q = q_p = \bar{z} = \bar{z}_1 = 0 \qquad \text{für } t < 0 \tag{3.1}$$

Für ein lineares Schließgesetz lautet die Regelfunktion

$$\left.\begin{aligned} q_p &= \frac{t}{t_s} && \text{für } 0 \le t < t_s \\ q_p &= 1 && \text{für } t \ge t_s \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

und mit der Verschlußzeit $t_s = 0$ ergibt sich für den Lastfall "plötzliches Öffnen" (LF 2):

$$q_p = 1 \qquad \text{für } t \ge 0 \tag{3.7}$$

3.2.3. Mehrfachschaltfälle

Jeder Einfachschaltfall erzeugt eine Massenschwingung, die gedämpft ist und daher nach einer gewissen Zeit in einen stationären Zustand übergeht. Wird erneut geschaltet, bevor diese Schwingung abgeklungen ist, so liegt ein Mehrfachschaltfall vor.

Das schwingungsfähige System wird dadurch erneut angeregt, wobei sich je nach dem Zeitpunkt der zweiten Schaltung eine Erhöhung oder Verminderung der Amplituden ergeben kann. Beim Betrieb einer Wasserkraftanlage, insbesondere eines Pumpspeicherwerkes, sind solche Schaltfolgen notwendig, um die Leistung der Anlage ständig dem aktuellen Energiebedarf anzupassen. Da die traditionellen Wasserschloß-Bauformen diesen hohen Anforderungen häufig nicht gerecht wurden, war es in der Vergangenheit oft erforderlich, bestimmte ungünstige Schaltfolgen auszuschließen, um die Betriebssicherheit der Anlage nicht zu gefährden.
Durch die hohe Schwingungsdämpfung, die mit Differentialwasserschlössern erzielt werden kann, ist die Resonanzgefahr bei Mehrfachschaltfällen bei Differentialwasserschlössern wesentlich geringer als bei traditionellen Bauformen.
Die ungünstigste denkbare Schaltfolge ist das rhythmische Öffnen und Schließen, wobei der Zeitpunkt jeder einzelnen Schaltung so gewählt wird, daß die größtmögliche Amplitude erzeugt wird.
Bei einer systematischen Untersuchung der Mehrfachschaltfälle stellt sich das Problem, daß es eine Fülle von Parametern gibt, die variiert werden können. Dazu gehören neben dem Schließgesetz und der Verschlußzeit die Anzahl der Einzelschaltungen und ihre zeitliche Abfolge. Das mathematische Modell ist in der Lage, jede beliebige Schaltfolge zu berücksichtigen. Im Hinblick auf die Übersichtlichkeit und Allgemeingültigkeit wird die Verschlußzeit auf $t_s = 0$ festgelegt und die Anzahl der Einzelschaltungen auf zwei beschränkt.
Der dimensionslose Zeitpunkt der zweiten Schaltung t_z soll so bestimmt werden, daß die zweite Amplitude ihren Maximalwert erreicht.
Für den Lastfall "plötzliches Schließen mit anschließendem plötzlichen Öffnen zum ungünstigsten Zeitpunkt t_z" (LF 4) gelten die Anfangsbedingungen:

$$q = q_p = \bar{z} = \bar{z}_1 = 1 \qquad \text{für } t < 0 \tag{3.2}$$

Es gilt die Regelfunktion:

$$\left.\begin{aligned} q_p &= 0 && \text{für } 0 \le t < t_z \\ q_p &= 1 && \text{für } t \ge t_z \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Analog lauten die Anfangsbedingungen für den Lastfall "plötzliches Öffnen mit anschließendem plötzlichen Schließen im ungünstigsten Zeitpunkt" (LF 5):

$$q = q_p = \bar{z} = \bar{z}_1 = 0 \qquad \text{für } t < 0 \tag{3.1}$$

Die zugehörige Regelfunktion lautet

$$\left.\begin{aligned} q_p &= 1 && \text{für } 0 \le t < t_z \\ q_p &= 0 && \text{für } t \ge t_z \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Der maßgebliche Schaltzeitpunkt kann für Schachtwasserschlösser ($\gamma = 0$) mit Hilfe einer Energiebetrachtung abgeschätzt werden. Nach einer Regelung enthält das System Schwingungsenergie, sie setzt sich zusammen aus potentieller und kinetischer Energie (z.B. Szabo [11])

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}\cdot m_R\cdot v^2 + m_{WS}\cdot g\cdot z \tag{3.10}$$

Die kinetische Energie wird aus der Differenz zwischen der Durchflußgeschwindigkeit zum Schaltzeitpunkt $v(t_z)$ und der stationären Geschwindigkeit nach Abklingen der Schwingung v_o bestimmt.
Die potentielle Energie ergibt sich analog aus der Differenz zwischen der Spiegellage im Wasserschloß zum Schaltzeitpunkt $\bar{z}(t_z)$ und der stationären Endlage $\bar{z}_o$:

$$E = \frac{1}{2}\cdot m_R\cdot\left[v(t_z) - v_o\right]^2 + m_{WS}\cdot g\cdot\left[\bar{z}(t_z) - \bar{z}_o\right]\cdot\frac{1}{2} \tag{3.11}$$

Die Amplitude der Spiegellage wird jeweils dann erreicht, wenn der kinetische Anteil der Energie gerade verschwindet. Wird die Gleichung (3.11) unter diesen Gesichtspunkten ausgewertet (Ableitung siehe Anhang II), so ergibt sich für die Amplitude eines Schachtwasserschlosses für den Schaltfall "plötzliches

Schließen mit anschließendem plötzlichen Öffnen zum Zeitpunkt t_z":

$$\bar{z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot(q-1)^2 + (\bar{z}-1)^2} \qquad (3.12)$$

Diese Amplitude erreicht ihren Maximalwert, wenn die Gleichung

$$\bar{z} = q - q^2 + q^3 \qquad \text{für } q < 0 \qquad (3.13)$$

erfüllt ist. Im Wertebereich der Funktion q nach dem Schließen

$$-1 \leq q \leq 1 \qquad (3.14)$$

ergibt sich damit aus Gleichung (3.13) für den ungünstigsten Schaltzeitpunkt t_z für den Lastfall 4:

$$-1 \leq q < 0 \qquad (3.15)$$

$$-3 \leq \bar{z} < 0 \qquad (3.16)$$

Die zweite Schaltung muß also erfolgen, während der Wasserspiegel nach dem ersten Aufschwingen absinkt ($q < 0$), und zwar bevor die Ruhelage erreicht wird ($\bar{z} < 0$).
Analog ergibt sich für die Amplitude eines Schachtwasserschlosses im Schaltfall "plötzliches Öffnen mit anschließendem plötzlichen Schließen zum Zeitpunkt t_z":

$$\bar{z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot q^2 + \bar{z}^2} \qquad (3.17)$$

Diese Funktion erreicht ihren Maximalwert, wenn die Gleichung

$$\bar{z} = q^3 \qquad \text{für } q > 1 \qquad (3.18)$$

erfüllt ist. Die Funktion q hat nach dem Öffnen den Wertebereich:

$$0 \leq q \leq 2 \qquad (3.19)$$

so daß man mit Gleichung (3.18) für den ungünstigsten Schaltzeitpunkt t_z für den Lastfall 5 erhält:

$$1 < q \leq 2 \qquad (3.20)$$

$$1 < \bar{z} \leq 8 \qquad (3.21)$$

Die zweite Schaltung muß also erfolgen, während der Wasserspiegel nach dem ersten Abschwingen aufsteigt ($q > 1$), und zwar bevor die stationäre Lage erreicht wird ($\bar{z} > 1$).
Für plötzliches Öffnen bzw. Schließen ohne Vorregelung lassen sich die Gleichungen (3.12) bzw. (3.17) für kleine Werte ε/α unter Vernachlässigung des potentiellen Anteils auswerten. Es ergibt sich die bekannte Gleichung für die Amplitude eines Schachtwasserschlosses (z.B. Stucky [10]):

$$\bar{z}^* = v_o\cdot\sqrt{\frac{a\cdot L}{A\cdot g}} \qquad (3.22)$$

in dimensionsloser Form:

$$\bar{z}^* = \sqrt{\alpha/\varepsilon} \qquad (3.23)$$

Damit ergibt sich aus den Gleichungen (3.16) und (3.21):

$$-3\cdot\sqrt{\varepsilon/\alpha} \leq \bar{z}/\bar{z}^* < 0 \qquad (3.24)$$

bzw.

$$\sqrt{\varepsilon/\alpha} < \bar{z}/\bar{z}^* \leq 8\cdot\sqrt{\varepsilon/\alpha} \qquad (3.25)$$

Für kleine Werte ε/α gilt in beiden Fällen

$$|\bar{z}| << \bar{z}^* \qquad (3.26)$$

so daß folgende Abschätzung gültig ist: Der ungünstigste Schaltzeitpunkt t_z für den Lastfall 4 liegt unmittelbar vor der Passage der Ruhelage im Wasserschloß und für den Lastfall 5 unmittelbar vor der Passage der stationären Spiegellage im Wasserschloß.
Für kleine Werte ε/α kann man in den Gleichungen (3.12) bzw. (3.17) die potentiellen Anteile gegenüber den kinetischen vernachlässigen. Für den ungünstigsten Schaltzeitpunkt ergibt sich dann für beide Lastfälle näherungsweise die Forderung, daß der Betrag des Durchflusses gerade ein Maximum erreicht.
Für Schachtwasserschlösser liegen damit leistungsfähige Methoden zur Bestimmung der ungünstigsten Schaltzeitpunkte für Mehrfachschaltfälle vor. Für Differentialwasserschlösser können sich

demgegenüber durch den Einfluß der Überlagerung der Wasserschloß-Schwingung mit dem Massenaustausch zwischen Steig- und Hauptschacht geringfügige Veränderungen ergeben. Daher wird zur genaueren Bestimmung des ungünstigsten Schaltzeitpunktes eine Voruntersuchung auf der Grundlage der numerischen Lösung des Systems durchgeführt.

3.2.4. Stabilität

Die Leistung einer Wasserkraftanlage ist proportional dem Produkt aus dem Turbinendurchfluß Q_p und der Nettofallhöhe $H_n = H - \bar{Z}$ zwischen dem Betriebswasserspiegel im Wasserschloß und dem zweiten Speicherbecken.

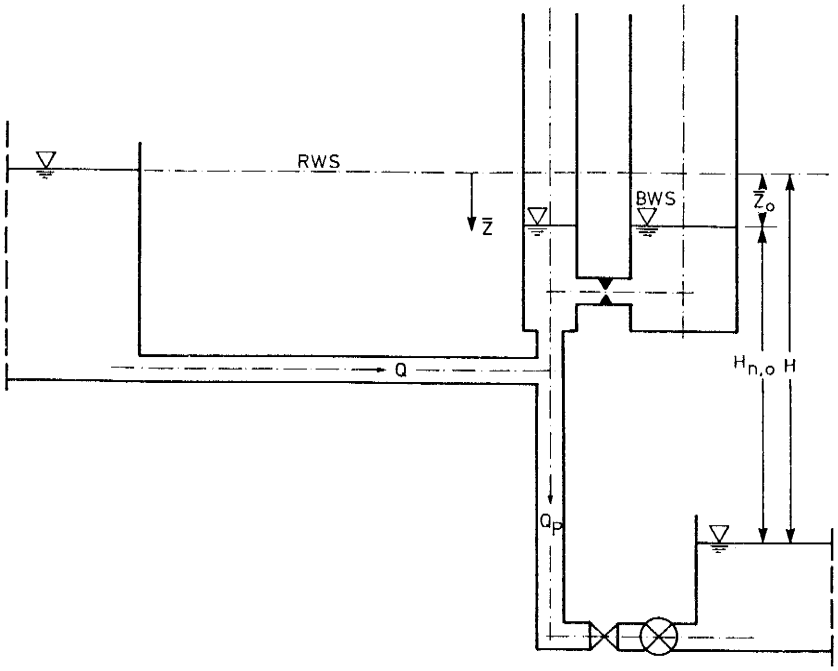


Abb. 3.2: Wasserkraftanlage mit Differentialwasserschloß

Es wird gefordert, daß nach dem Öffnen eine konstante Leistung erzielt wird, daß also gilt:

$$Q_p \cdot (H - \bar{Z}) = Q_o \cdot (H - \bar{Z}_o) \tag{3.27}$$

Da der Wasserspiegel im Wasserschloß nach dem Öffnen unter die stationäre Lage $\bar{Z}_o$ abschwingt, muß der Durchfluß Q_p zur Erfüllung dieser Forderung erhöht werden, was ein weiteres Absinken des Wasserspiegels zur Folge hat. Die Regelung auf konstante Leistung ist eine Regelung, bei der Resonanzgefahr besteht.
Die Stabilitätsbedingung nach Thoma [12] besagt, daß die Schwingung bei dieser Regelung stabil bleiben muß; es wird eine gedämpfte Schwingung gefordert.

Die Anfangsbedingungen für den Lastfall "plötzliches Öffnen mit Regelung auf konstante Leistung" (LF 3) lauten:

$$q = q_p = \bar{z} = \bar{z}_1 = 0 \qquad \text{für } t < 0 \tag{3.1}$$

Die Regelfunktion nach Gleichung (3.27) lautet in dimensionsloser Form:

$$q_p = \frac{h - 1}{h - \bar{z}} \qquad \text{für } t \geq 0 \tag{3.28}$$

mit

$$h = \frac{H}{\bar{Z}_o} \tag{3.29}$$

Es gibt verschiedene Typen von Instabilität, die bei der numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems erkannt und erfaßt werden müssen:

- Der Wasserspiegel im Wasserschloß sinkt nach dem Öffnen gegen unendlich ab, ohne daß eine Schwingung entsteht.
  Dieser Zustand wird erreicht, wenn die instabile Gleichgewichtslage überschritten wird. Das System befindet sich im Gleichgewicht, wenn gilt:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{d\bar{z}_1}{dt} = 0 \tag{3.30}$$

Das Gleichungssystem (2.32) bis (2.34) bzw. (2.36) bis (2.38) ergibt dann mit Gleichung (3.28):

$$\bar{z} - q \cdot |q| = 0 \tag{3.31}$$

$$\frac{h - 1}{h - \bar{z}} - q = 0 \tag{3.32}$$

Für diesen Lastfall gelten die Voraussetzungen:

$$q \geq 0 \quad ; \quad h > 1 \quad ; \quad h > \bar{z} \tag{3.33}$$

so daß sich durch Einsetzen folgende kubische Gleichung ergibt:

$$\bar{z}^3 - 2 \cdot h \cdot \bar{z}^2 + h^2 \cdot \bar{z} = 1 - 2 \cdot h + h^2 \tag{3.34}$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten:

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_{(1)} &= 1 \\ \bar{z}_{(2)} &= h - 0{,}5 + \sqrt{h - 0{,}75} \\ \bar{z}_{(3)} &= h - 0{,}5 - \sqrt{h - 0{,}75} \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Die erste Lösung entspricht dem stationären Zustand, also der stabilen Gleichgewichtslage. Die zweite und dritte Lösung bezeichnen instabile Gleichgewichtslagen, von denen die höher gelegene Lösung $\bar{z}_{(3)}$ maßgeblich ist.

Das System wird also als instabil bezeichnet, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt der Wasserspiegel im Steigschacht unter die Gleichgewichtslage $\bar{z}_{(3)}$ absinkt, wenn also gilt:

$$\bar{z}(t) > h - 0{,}5 - \sqrt{h - 0{,}75} \tag{3.36}$$

- Die Schwingung wird durch die Regelung angefacht, ohne daß bei den ersten Perioden die instabile Gleichgewichtslage erreicht wird.
  Dieser Fall läßt sich über die Dämpfung erfassen. Ist die zweite Abschwingung im Steigschacht größer als die erste Abschwingung, so wird das System als instabil bezeichnet.

Thoma gibt an, daß die Stabilitätsbedingung für Schachtwasserschlösser erfüllt ist, wenn die Querschnittsfläche des Wasserschlosses einen Mindestquerschnitt übersteigt:

$$A > A_{Th} = \frac{L \cdot a}{\Sigma\zeta \cdot (H - \bar{Z}_o)} \tag{3.37}$$

In dimensionsloser Form lautet diese Gleichung:

$$\varepsilon/\alpha > \varepsilon/\alpha_{Th} = \frac{1}{2(h - 1)} \tag{3.38}$$

bzw.

$$h > h_{min,Th} = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon/\alpha} + 1 \tag{3.39}$$

Die zweite Stabilitätsbedingung von Thoma

$$H > 3 \cdot \bar{Z}_o \tag{3.40}$$

lautet in dimensionsloser Form:

$$h > 3 \tag{3.41}$$

Für diesen Lastfall wird das System der dimensionslosen Parameter, die die Geomtrie des schwingungsfähigen Systems beschreiben, um den Parameter h für die relative Bruttofallhöhe erweitert.

Ist die Geometrie des schwingungsfähigen Systems durch die Parameter α, β, γ und ε bzw. β/α und ε/α vorgegeben, so ergibt sich aus Gleichung (3.39), daß die Gefahr der Instabilität um so größer wird, je kleiner die Fallhöhe h ist.

Das Ziel der Stabilitätsuntersuchung wird daher darin bestehen, die kleinste Fallhöhe h_{min} zu bestimmen, für die das gegebene System gerade noch die Stabilitätsbedingung erfüllt. Zu diesem Zweck wird die Stabilität einer gegebenen Anlage in einem Fallhöhenbereich untersucht, der sich mit einem Sicherheitszuschlag nach dem Stabilitätskriterium von Thoma für Schachtwasserschlösser mit dem Querschnitt des Steigschachtes einerseits und der Summe der Querschnitte von Steig- und Hauptschacht andererseits nach Gleichung (3.39) ergibt. In dem so vorgegebenen Fallhöhenbereich wird die Stabilitätsgrenze h_{min} durch fortgesetzte Intervallhalbierung bestimmt.

4. Numerische Lösung des Gleichungssystems

4.1. Lösungsverfahren

Das Differentialgleichungssystem (2.17) bis (2.19) bzw. (2.21) bis (2.23) kann unter Angabe der Anfangs- und Randbedingungen mit einem der üblichen Verfahren gelöst werden, die zur schrittweisen Lösung eines solchen Systems zur Verfügung stehen.
Das Runge-Kutta-Doppelschritt-Verfahren ist eine komfortable Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen, die bei relativ geringem Aufwand eine hohe Genauigkeit liefert, die stets kontrollierbar ist (z.B. Becker [1], Collatz [2]). Verwendet wird ein Verfahren 4. Ordnung. Es wird vorausgesetzt, daß der Funktionswert y_i an der Stelle x_i aus den Anfangsbedingungen bzw. der bisherigen Rechnung bekannt ist und eine Differentialgleichung der folgenden Form vorliegt:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{4.1}$$

Dann gilt für den Funktionswert y_{i+1} an der Stelle $x_{i+1} = x_i + \Delta x$:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \tag{4.2}$$

mit

$$\Delta y_i = \frac{\Delta x}{6}\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4) \tag{4.3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_i;y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \tfrac{\Delta x}{2}\ ;\ y_i + \tfrac{\Delta x}{2}\cdot k_1) \\ k_3 &= f(x_i + \tfrac{\Delta x}{2}\ ;\ y_i + \tfrac{\Delta x}{2}\cdot k_2) \\ k_4 &= f(x_i + \tfrac{\Delta x}{2}\ ;\ y_i + \Delta x\cdot k_3) \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Werden zwei solche Schritte mit der Schrittweite Δx und zusätzlich ein Vergleichsschritt mit der doppelten Schrittweite $\overline{\Delta x} = 2\cdot\Delta x$ durchgeführt, so erhält man zwei unterschiedliche

Funktionswerte $y_{i+2}^{\Delta x,\Delta x}$ und $y_{1+2}^{2\Delta x}$ an der gleichen Stelle $x_{i+2} = x_i + 2\Delta x$.

Der Fehler bei der Feinrechnung hat dann die Größenordnung:

$$F_{\Delta x,\Delta x} = \frac{1}{15}\cdot(y_{i+2}^{2\Delta x} - y_{i+2}^{\Delta x,\Delta x}) \tag{4.5}$$

Reicht diese Genauigkeit nicht aus, so wird der soeben vollzogene Schritt mit einer kleineren Schrittweite wiederholt. Überschreitet die Genauigkeit einen bestimmten Wert, so kann zur Erhöhung der Rechengeschwindigkeit die Schrittweite für den folgenden Schritt vergrößert werden.
Es ist also sichergestellt, daß die Rechengenauigkeit sich stets in einem bestimmten, vorgegebenen Rahmen bewegt. Zudem ist nach jedem Doppelschritt eine Verbesserung der Lösung mit der folgenden Gleichung möglich:

$$y_{i+2} = y_{i+2}^{\Delta x,\Delta x} - F_{\Delta x,\Delta x} \tag{4.6}$$

Bei dem vorliegenden Differentialgleichungssystem handelt es sich um ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{dy^{(j)}}{dx} = f(y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)}) \qquad j = 1,2,3 \tag{4.7}$$

Der beschriebene Algorithums läßt sich ohne Schwierigkeit auf ein solches System anwenden.

4.2. Genauigkeit der Berechnungen

Die Genauigkeit des Verfahrens kann über die Schrittweite gesteuert werden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß kleine Schrittweiten einen hohen Verbrauch an Rechenzeit verursachen, so daß auch wirtschaftliche Aspekte für die Wahl des maximal zulässigen Fehlers für den einzelnen Integrationsschritt maßgeblich sind. Wird die Zahl der Schritte für jedes berechnete System aus wirtschaftlichen Gründen beschränkt, so hat die Erhöhung der Rechengenauigkeit zur Folge, daß die Zahl der Fälle zunimmt, bei denen

die Berechnung ohne vollständige Ergebnisse abgebrochen wird. Außerdem ist die erzielbare Genauigkeit durch die Anzahl der Ziffern begrenzt, die der Rechner berücksichtigt. Eine hohe Rechengenauigkeit hat keinen Sinn, wenn die Zuwächse Δy_i bzw. Δx so klein sind, daß sie bei der Addition nicht mehr in den zählenden Stellen berücksichtigt werden. Durch das Arbeiten mit doppelt genauen Zahlen läßt sich die Anzahl der zählenden Ziffern zwar von ca. 13 auf ca. 26 erhöhen, aber auch dies führt zu einer erheblichen Verlängerung der Rechenzeit, ist also wirtschaftlich problematisch. Bei den Voruntersuchungen hat sich ein zulässiger Fehler von $2^{o}/oo$ als sinnvoll erwiesen. Das bedeutet, daß die Schrittweite halbiert wird, wenn für eine Funktion gilt:

$$F^{(j)}_{\Delta x,\Delta x} > 2\cdot 10^{-3}\cdot \Delta y_i^{(j)} \qquad j = 1,2,3 \tag{4.8}$$

Zur Erhöhung der Rechengeschwindigkeit wird die Schrittweite um den Faktor 1,2 erhöht, wenn für alle Funktionen gilt:

$$F^{(j)}_{\Delta x,\Delta x} < 2\cdot 10^{-5}\cdot \Delta y_i^{(j)} \qquad j = 1,2,3 \tag{4.9}$$

Der tatsächliche Fehler ist wegen der Verbesserung der Lösung nach Gleichung (4.6) um eine Größenordnung kleiner als $2^{o}/oo$.

Wesentlicher für die erzielbare Rechengenauigkeit ist jedoch die numerische Stabilität des Differentialgleichungssystems. Nach jedem Integrationsschritt sind die Ausgangswerte für den nächsten Schritt mit einem Fehler behaftet. Wenn dieser Fehler eine weitere Abweichung der numerischen Lösung von der Wirklichkeit verursacht, bezeichnet man das Differentialgleichungssystem als "numerisch instabil". Der Fehler an der Stelle x_{2n} hat dann die Größenordnung

$$F_{2n} = (F_{\Delta x,\Delta x})^n \tag{4.10}$$

Als "numerisch stabil" wird ein Differentialgleichungssystem bezeichnet, wenn die Tendenz besteht, daß der Fehler des vorigen Schrittes durch den folgenden korrigiert wird.

Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y^{(j)}}\left(\frac{dy^{(j)}}{dx}\right) < 0 \qquad \text{für } j = 1,2,3 \tag{4.11}$$

Die Auswertung des Gleichungssystems (2.36) bis (2.38) ergibt:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|) \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(-2\cdot q) < 0 & \text{für } q > 0 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot 2\cdot q < 0 & \text{für } q < 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = q_P - q - \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{dt} \tag{2.22}$$

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\gamma\cdot\sqrt{|\bar{z} - \bar{z}_1|}\cdot \mathrm{sign}(\bar{z} - \bar{z}_1) \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right) = \begin{cases} -\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{\bar{z} - \bar{z}_1}} < 0 & \text{für } \bar{z} - \bar{z}_1 > 0 \\ -\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{\bar{z}_1 - \bar{z}}} < 0 & \text{für } \bar{z} - \bar{z}_1 < 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(\frac{d\bar{z}_1}{dt}\right) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{\bar{z} - \bar{z}_1}} < 0 & \text{für } \bar{z} - \bar{z}_1 > 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{\bar{z}_1 - \bar{z}}} < 0 & \text{für } \bar{z} - \bar{z}_1 < 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Für den Lastfall 3 mit der Regelfunktion nach Gleichung (3.28) ergibt sich aus Gleichung (2.37):

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{h - 1}{h - \bar{z}} - q - \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{dt} \tag{4.15}$$

Unter Verwendung von Gleichung (4.13) gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right) = -\frac{h - 1}{(h - \bar{z})^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{d\bar{z}_1}{dt}\right) < 0 \tag{4.16}$$

Das vorliegende Differentialgleichungssystem ist also numerisch stabil. Die Genauigkeit der Lösung liegt in der Größenordnung des Fehlers für den einzelnen Schritt.

4.3. Umfang der Berechnungen

Mit dem vorliegenden mathematischen Modell können alle Konstruktionsvarianten von Differentialwasserschlössern für beliebige Regelfunktionen berechnet werden.

Zur Berechnung von Differentialwasserschlössern mit Kammern wird das Differentialgleichungssystem (2.32) bis (2.34) benutzt. Die Geometrie des Systems wird mit Hilfe der dimensionslosen Parameter $\alpha = \alpha(\bar{z}), \beta, \gamma$ und ε beschrieben. Zur Darstellung des Verlaufs der Funktion α können weitere Parameter $\bar{z}_i$ für die Lage der Begrenzungen der Kammern eingeführt werden.
Zur Berechnung von Differentialwasserschlössern mit konstanten Querschnitten wird das Differentialgleichungssystem (2.36) bis (2.38) verwendet. Die Eigenschaften des Systems werden mit den Parametern ε/α, β/α und γ in die Berechnung eingeführt.
Beide Differentialgleichungssysteme eignen sich zur Berechnung von Differentialwasserschlössern mit Überfall. Die Lage der Überfallkrone wird durch den Parameter $\bar{z}_ü$ festgelegt.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung von Differentialwasserschlössern mit konstanten Querschnitten ohne Berücksichtigung des Überfalls.

Die Bemessung eines Wasserschlosses erfolgt in Kenntnis der Eigenschaften der Triebwasserleitung, der Fallhöhe und bestimmter Regelfunktionen. Die Form und die Abmessungen des Wasserschlosses werden dann so bestimmt, daß bestimmte Bedingungen eingehalten werden, die z.B. die Amplituden, die Dämpfung und die Wirtschaftlichkeit der Anlage betreffen.
Für den Nachweis der Betriebssicherheit ist die Auswertung einzelner Schwingungsverläufe erforderlich, die sich bei der gewählten Konstruktion für die gegebene Regelfunktion ergeben. Dazu ist eine Vorbemessung erforderlich, um die Grössenordnung der Bauwerksabmessungen zu bestimmen. Zur Erstellung allgemeiner

Unterlagen für die Vorbemessung von Differentialwasserschlössern müssen die dimensionslosen Parameter über ihren physikalisch sinnvollen Wertebereich variiert und die sich dabei ergebenden Schwingungsverläufe ausgewertet werden.
Der Wertebereich des Parameters ε/α, der das System Triebwasserleitung-Steigschacht beschreibt, kann mit Hilfe des Stabilitätskriteriums nach Thoma [12] abgeschätzt werden. Wird unter Anwendung der Gleichung (3.41) für die Fallhöhe h der Wertebereich

$$3 \leq h \leq 2000 \tag{4.17}$$

vorausgesetzt, so ergibt sich nach Gleichung (3.38) für ε/α_{Th}:

$$2{,}5 \cdot 10^{-4} \leq \varepsilon/\alpha_{Th} \leq 0{,}25 \tag{4.18}$$

Da Differential- gegenüber Schachtwasserschlössern eine erhöhte Sicherheit gegen Instabilität haben, und zudem die Annahme einer Fallhöhe H in der Größenordnung der dreifachen stationären Verlusthöhe $\bar{z}_o$ völlig unrealistisch ist, wird gewählt:

$$10^{-4,5} \leq \varepsilon/\alpha \leq 10^{-1} \tag{4.19}$$

Der Wertebereich des Hauptschacht-Parameters β/α wird dadurch gegeben, daß der Querschnitt A_1 des Hauptschachtes immer größer als der einfache, aber kleiner als der einhundertfache Querschnitt A des Steigschachtes ist. Dann gilt:

$$10^{-2} \leq \beta/\alpha \leq 10^{0} \tag{4.20}$$

Der Wertebereich des Drosselparameters γ wird so gewählt, daß an seinen Grenzen jeweils der Übergang vom Differential- zum Schachtwasserschloß erkennbar wird. Nach einer Voruntersuchung ist das der Fall für

$$10^{-3} \leq \gamma \leq 10^{0} \tag{4.21}$$

Für die vergleichsweise Berechnung von Schachtwasserschlössern

mit dem Querschnitt A des Steigschachtes wird gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \beta/\alpha &= 10^9 \quad ; \quad (\text{d.h. } \beta/\alpha \to \infty) \end{aligned}\right\} \quad (4.22)$$

Die Variation der Parameter bei den Parameterstudien erfolgt wegen der Lage dieser Wertebereiche in den Exponenten der Zehnerpotenzen, so daß sich bei der Darstellung der Ergebnisse im logarithmischen Maßstab ein gleichmäßiges Punktraster ergibt.
Die Punktdichte wird dabei durch den Umstand begrenzt, daß die Anzahl der durchzuführenden und auszuwertenden Schwingungsberechnungen sich bei hoher Punktdichte immens erhöht. Ihre Anzahl pro Lastfall ergibt sich als Produkt der Varianten pro Parameter, so daß gilt:

$$n = n_{\varepsilon/\alpha} \cdot n_{\gamma} \cdot n_{\beta/\alpha} \quad (4.23)$$

Für die Stabilität (LF 3) wächst diese Zahl durch die Variation der Fallhöhe h weiter an. Es gilt:

$$n' = n_{\varepsilon/\alpha} \cdot n_{\gamma} \cdot n_{\beta/\alpha} \cdot n_h \quad (4.24)$$

Es wird gewählt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varepsilon/\alpha &= 10^{0,5} \quad \to \quad n_{\varepsilon/\alpha} = 8 \\ \Delta\gamma &= 10^{0,125} \quad \to \quad n_{\gamma} = 25 \\ \Delta\beta/\alpha &= 10^{0,125} \quad \to \quad n_{\beta/\alpha} = 17 \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

Die Anzahl der pro Lastfall durchzuführenden Berechnungen beträgt damit 3400; für den Lastfall 3 sind etwa 50.000 Schwingungsverläufe ausgewertet worden.

4.4. Das Programmsystem SCHLxxx

Zur numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems wurde auf der Control Data Cyber 170/720 des Hochschulrechenzentrums Wuppertal eine Bibliothek von FORTRAN5-Hauptprogrammen entwickelt.

Die Programme bestehen im wesentlichen aus den Teilen

- Setzen von Eingangswerten
- Berechnung des Schwingungsverlaufes
- Abschätzung der Rechengenauigkeit
- Bestimmung der Extremwerte
- Protokollierung der Ergebnisse

Der Mittelteil ist bis auf geringfügige Modifikationen in allen Programmversionen identisch, die sich hauptsächlich in der Bestimmung der Eingangswerte und der Protokollierung unterscheiden. Die nach der Testphase vorliegenden Programme sind in der Tab. 4.1 zusammengestellt. Auf den Abdruck vollständiger Programmtexte wird verzichtet. Der Programmablauf ist in der Abb. 4.1 dargestellt.
Bei der Parametervariation werden bei den Einfachschaltfällen (LF 1, LF 2) die ersten drei Amplituden im Steigschacht und die erste Amplitude im Hauptschacht berechnet und ausgegeben. Im Lastfall 3 wird die Berechnung beendet, wenn eine Beurteilung der Stabilität stattfinden kann. Die Ausgabe beschränkt sich auf die Mindestfallhöhe. Bei den Mehrfachschaltfällen (LF 4, LF 5) werden die ersten beiden Amplituden im Steig- und Hauptschacht berechnet und protokolliert.
Die Bezeichnungen für diese Ergebnisse sind in der Tab. 4.2 und in der Abb. 4.2 zusammengestellt.
Zur Darstellung des Schwingungsverlaufes werden vollständige Datenfelder mit den Spiegellagen und den zugehörigen Zeitpunkten in dem oben beschriebenen Rahmen ausgegeben. Zur Ermittlung der Kriterien für die ungünstigsten Schaltzeitpunkte für die Mehrfachschaltfälle werden zusätzliche Daten wie Durchfluß, Steiggeschwindigkeit und Spiegeldifferenz zwischen den Schächten erzeugt.

Name des Programmes	LF	Zweck des Programmes	Bemerkungen
SCHL8	1	PV	Schachtwasserschlösser
SCHL8S	1	PV	
SCHL8V	1	SB	Daten für die Entwicklung des LF 4
SCHL8VM	1	SB	
SCHL10	3	PV	Schachtwasserschlösser
SCHL10S	3	PV	
SCHL10V	3	SB	
SCHL11	2	PV	Schachtwasserschlösser
SCHL11S	2	PV	
SCHL11V	2	SB	Daten für die Entwicklung des LF 5
SCHL13	4	PV	Variation des 2. Schaltzeitpunktes für LF 4
SCHL13T		PV	
SCHL13V	(4)	SB	s. o.
SCHL14	5	PV	Variation des 2. Schaltzeitpunktes für LF 5
SCHL14T		PV	
SCHL15V		PV, SB	Differentialwasserschlösser mit beliebiger Regelung

PV = Parametervariation

SB = Schwingungsberechnung für graphische Darstellung

LF = Lastfall

LF 1 = plötzliches Schließen

LF 2 = plötzliches Öffnen

LF 3 = plötzliches Öffnen mit Regelung auf konstante Leistung

LF 4 = plötzliches Schließen mit anschließendem plötzlichen Öffnen im ungünstigsten Zeitpunkt

LF 5 = plötzliches Öffnen mit anschließendem plötzlichen Schließen im ungünstigsten Zeitpunkt

Tab. 4.1: Programmsystem SCHLxxx

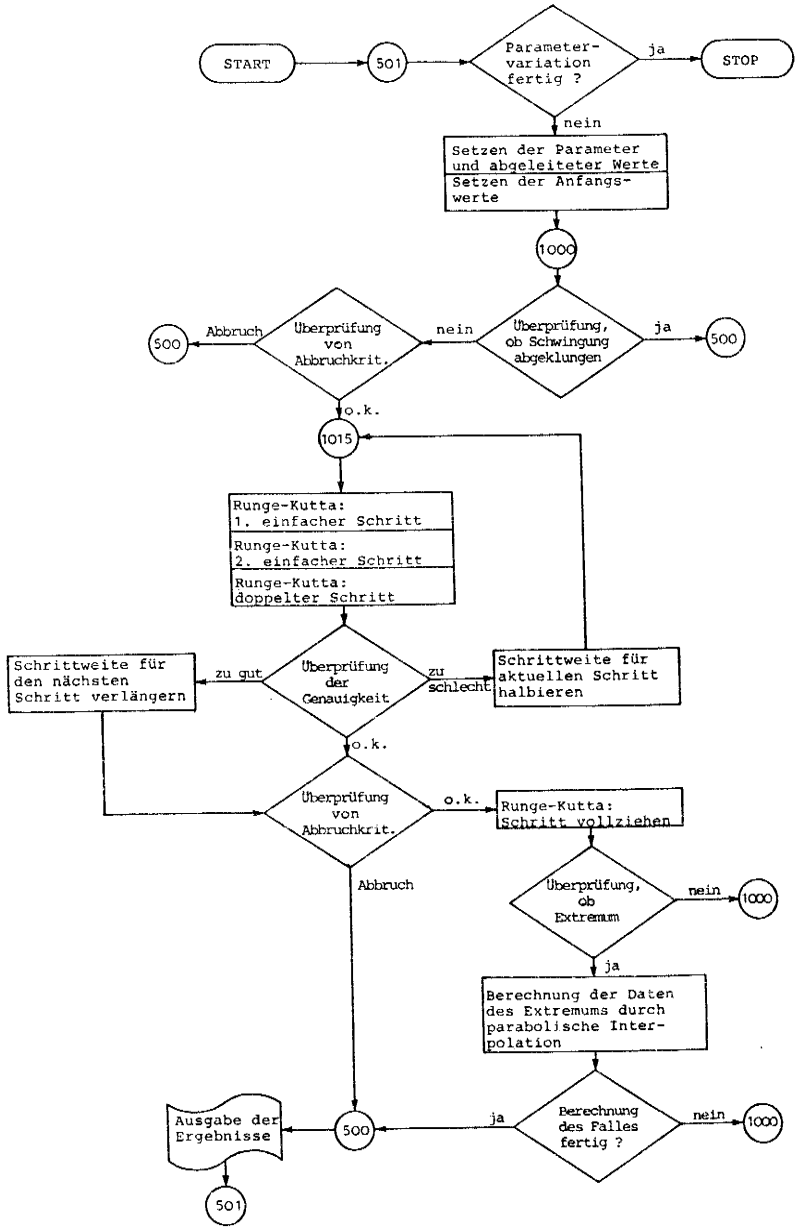


Abb. 4.1: Ablaufdiagramm

Bezeichnung	Bedeutung	Vorzeichen im LF 1	2	3	4	5
ZM1	1. Extremum im Steigschacht	-	+	+	-	+
ZM2	2. Extremum im Steigschacht	+	-	-		
ZM3	3. Extremum im Steigschacht	-	+	+		
Z1M1	1. Extremum im Hauptschacht	-	+	+	-	+
TM1	Zeitpunkt von ZM1					
TM2	Zeitpunkt von ZM2			⊕		
TM3	Zeitpunkt von ZM3					
T1M1	Zeitpunkt von Z1M1					
ZMIN	2. Extremum im Steigschacht				+	
Z1MIN	2. Extremum im Hauptschacht				+	
ZMAX	2. Extremum im Steigschacht					-
Z1MAX	2. Extremum im Hauptschacht					-

Eine Indizierung dieser Größen bezieht sich auf die Lastfälle.

Tab. 4.2: Bezeichnungen

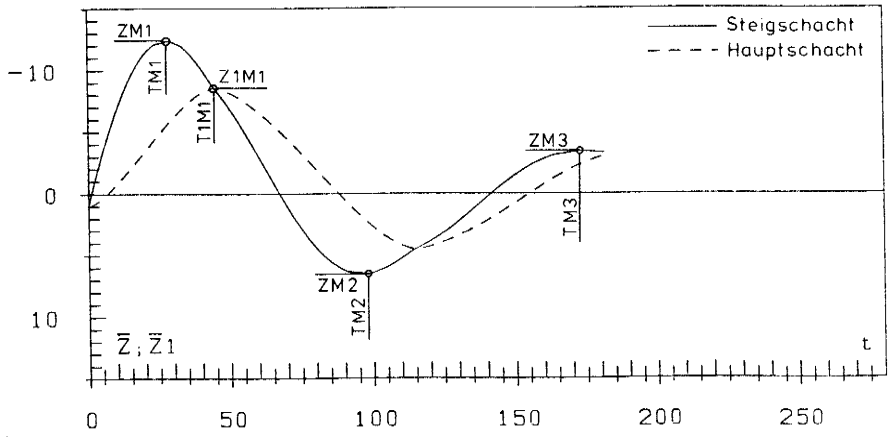


Abb. 4.2: Schwingungsverlauf in einem Differentialwasserschloß für den Lastfall 1, Bezeichnungen

4.5. Auswertung der Ergebnisse

4.5.1. Optimierung

Aus den Parameterstudien stehen alle Daten zur Verfügung, die das Schwingungsverhalten der Differentialwasserschlösser beschreiben und die zur Bemessung notwendig sind. Es kann jedoch keine allgemeine Bemessungsvorschrift geben, die für jede Anlage verbindlich ist. Die Vielzahl der möglichen Konstruktionsvarianten macht es im Gegenteil erforderlich, jedes Wasserschloß für die ganz speziellen Anforderungen der einzelnen Wasserkraftanlage zu bemessen.
Darum ist es sinnvoll, aus den Bauwerksparametern und den bekannten Daten der Schwingung Größen abzuleiten, die in ein Optimierungsverfahren eingehen können. Die anlagespezifischen Anforderungen können dann als Optimierungsvorschrift formuliert werden, so daß eine eindeutige Bemessung möglich wird. Solche Größen können z.B. die Dämpfung D oder das Ausbruchsvolumen V eines Wasserschlosses sein, die wie folgt definiert werden können:

$$D = \frac{ZM1_1}{ZM3_1} \quad \text{bzw.} \quad D' = \frac{ZM1_2 - 1}{ZM3_2 - 1} \tag{4.26}$$

$$\left.\begin{aligned} V &= A \cdot \bar{Z}_o \cdot \left[|ZM1_1| + ZM1_2 + \frac{\alpha}{\beta} \left(|Z1M1_1| + Z1M1_2 \right) \right] \\ &= A \cdot \bar{Z}_o \cdot V' \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

Einfache Beispiele für Optimierungsvorschriften sind die Forderungen nach maximaler Schwingungsdämpfung oder minimalem Ausbruchsvolumen. Für jede Optimierungsvorschrift kann eine Bemessungsvorschrift erarbeitet werden.
Zur Variation der Optimierungsvorschriften wäre es sinnvoll, ihre Eingangsgrößen als Funktionen der zu optimierenden Bauwerksparameter zu kennen. Da mit den vorliegenden Programmen an beliebigen Stellen der Definitionsbereiche der Parameter Funktionswerte berechnet werden können, ist es grundsätzlich möglich, solche Funktionen durch nichtlineare Regression unter Minimierung der Fehlerquadrate in jeder Genauigkeit anzunähern.

Dies wurde für die erste Aufschwingung im Steigschacht bei plötzlichem Schließen ($ZM1_1$) mit einer Genauigkeit von etwa ±2,5% durchgeführt. Die Funktionsgleichung ist jedoch so kompliziert, daß auf ihren Abdruck und nähere Erläuterungen verzichtet wird.
Die Idee, über Optimierungsverfahren zu allgemeinen Bemessungsvorschriften für Differentialwasserschlösser zu gelangen, wird fallengelassen.

4.5.2. Graphische Darstellung

Die graphische Darstellung der Ergebnisse der Parameterstudien stößt auf die Schwierigkeit, daß die Ergebnisvariablen von drei Parametern abhängen. Der zu zeichnende Datensatz ist also vierdimensional, so daß selbst bei der dreidimensionalen Darstellung eine Variable für jedes Blatt konstant gehalten werden muß.
Da die Wirkung des Differentialwasserschlosses untersucht werden soll, wird der Parameter ε/α konstant gehalten. Jedes Diagramm zeigt dann für eine gegebene Anlage den Einfluß der Drosselung und des Hauptschacht-Querschnittes auf die jeweilige Ergebnisvariable.
Eine echte dreidimensionale Darstellung in der Ebene ist der perspektivischen Verzerrung unterworfen. Es ist daher nur bedingt möglich, Daten aus einer solchen Darstellung abzugreifen. Andererseits ist die perspektivische Zeichnung sehr anschaulich und daher gut geeignet, den Einfluß eines Parameters auf den Schwingungsverlauf begreifbar zu machen. Zur vollständigen Dokumentation der Ergebnisse dieser Arbeit wurden jedoch Höhenlinien verwendet, da diese Art der Darstellung die Entnahme von Daten erleichtert.
Bestimmte Parameter-Kombinationen sind physikalisch wenig sinnvoll, so z.B. Differentialwasserschlösser mit sehr geringer Drosselung, also großen Werten γ. In diesem Bereich entstehen bei der numerischen Lösung des Gleichungssystems sehr kleine Schrittweiten, weil durch die geringe Spiegeldifferenz zwischen Steig- und Hauptschacht die berechneten Spiegeländerungen im Hauptschacht stark von der Schrittweite abhängen. Um zu große

Rechenzeiten zu vermeiden, wurde in diesen Fällen die Berechnung nach 5000 Doppelschritten abgebrochen. Die betroffenen Bereiche in den Bildern sind unterlegt; die eingetragenen Werte sind extrapoliert.

4.6. Anmerkungen zu den Programmen

In den SCHLxxx-Programmen wurde auf die Benutzung von Bibliotheks-Unterprogrammen verzichtet. Dadurch konnten sie den Anforderungen optimal angepaßt werden. Ihr Rechenzeitbedarf liegt in einer Größenordnung von etwa einer Sekunde pro Fall. Bei Parameterstudien wird also pro Lauf etwa eine Stunde Rechenzeit verbraucht, im Lastfall 3 etwa 12 Stunden.
Für die nichtlineare Regression wurde eine zweite FORTRAN5-Hauptprogramm-Bibliothek erstellt, in der Unterprogramme aus der NAG-Bibliothek[1] zur Minimierung der Fehlerquadrate eingesetzt wurden. Der Bedarf an Rechenzeit bemißt sich auch hier nach Stunden.
Zum Erzeugen von Graphiken wurde eine weitere Bibliothek von FORTRAN5-Hauptprogrammen entwickelt, deren wesentliche Bestandteile Bibliotheks-Unterprogramme des Erlanger-Graphik-Systems[2] sind. Das Unterprogramm zum Zeichnen von Höhenlinien nach Datenfeldern weist leider einige Schwächen auf, die u.a. das Glätten und Beschriften der Höhenlinien betreffen, so daß die Bilder oft ein unorganisches Aussehen haben. Die dreidimensionalen Graphiken wurden aus einzelnen, perspektivisch verschobenen Kurven zusammengesetzt und zeigen die wahre Qualität der Datensätze. Der Rechenzeitbedarf dieser Programme liegt in der Größenordnung einer Minute.

[1] NAG FORTRAN Library, Numerical Algorithms Group, 1981

[2] Erlanger Graphik-System (Erlgraph 2.OM)
Mitteilungsblatt des regionalen Rechenzentrums Erlangen Nr. 37, Erlangen 1984

5. Diskussion der Ergebnisse

5.1. Einfluß der Verschlußzeit

Die Wahl der Verschlußzeit t_s beeinflußt die Ergebnisse der Schwingungsberechnungen. Um diesen Einfluß abzuschätzen, wurde analysiert, in welcher Weise die Größenordnung und die zeitliche Lage der ersten Amplitude im Steigschacht bei einem linearen Schließen von der Verschlußzeit abhängig ist. Die für die Bemessung des Wasserschlosses maßgebliche Verschlußzeit liegt bei modernen Wasserkraftanlagen unter 30 s, während die Periode der Wasserschloß-Schwingung die Größenordnung von Minuten hat. Daher wird die Verschlußzeit bis zu etwa einer halben Periode der Wasserschloß-Schwingung variiert.

Die Abb. 5.1 zeigt den Verlauf der Schwingung in einem Differentialwasserschloß für die gewählte Parameterkombination für die Verschlußzeit $t_s = 0$.

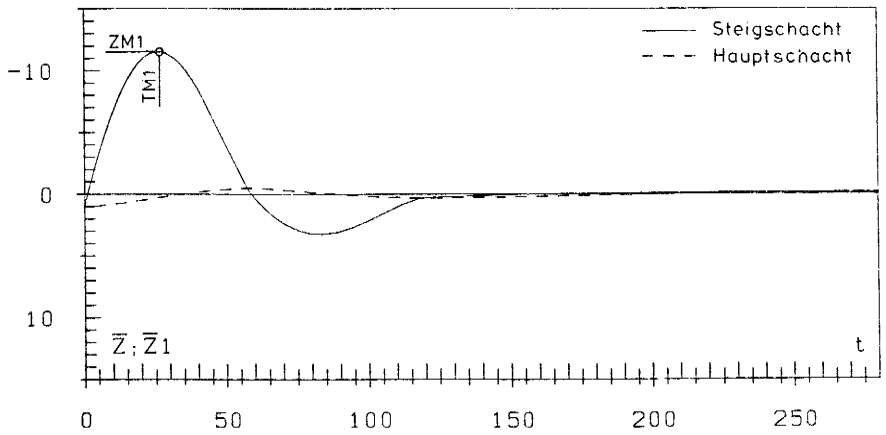


Abb. 5.1: Schwingungsverlauf im Differentialwasserschloß (LF 1)
$\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$; $\lg \gamma = -1{,}0$

In der Abb. 5.2 ist die Abhängigkeit der Amplitude ZM1 und ihrer zeitlichen Lage TM1 von der dimensionslosen Verschlußzeit t_s für ein lineares Schließgesetz aufgetragen.

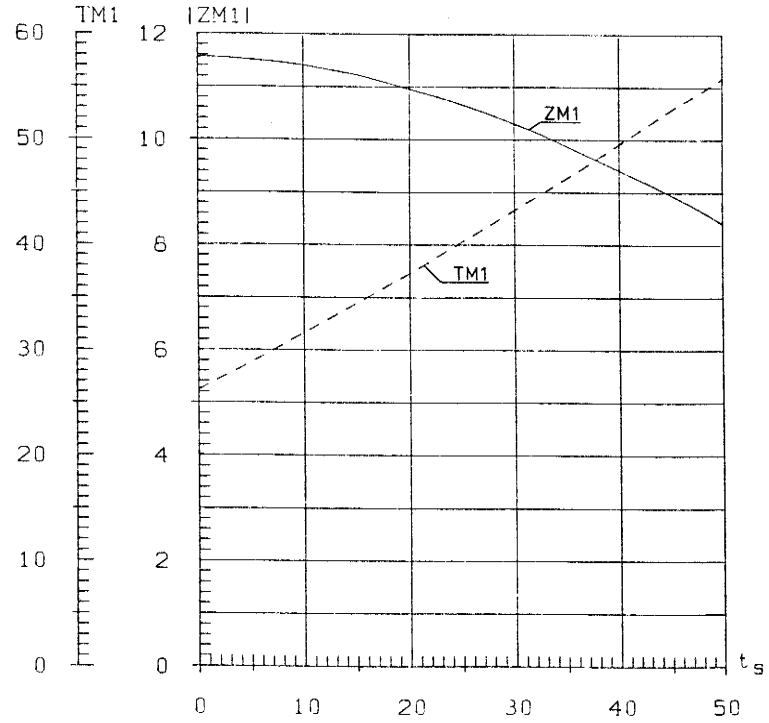


Abb. 5.2: Abhängigkeit der Amplituden im Differentialwasserschloß von der Verschlußzeit
$\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$; $\lg \gamma = -1{,}0$

Wie zu erwarten ist, nehmen die Amplituden bei wachsender Verschlußzeit ab, so daß die Wahl der Verschlußzeit $t_s = 0$ zu einer konservativen Bemessung führt. Bei kurzen Verschlußzeiten ist ihr Einfluß auf die Amplituden sehr gering; sein Betrag erreicht 5 %, wenn die Verschlußzeit in die Größenordnung einer Viertelperiode kommt. Darin besteht gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Stucky [10] für reibungsfreie Schachtwasserschlösser.

Die Tatsache, daß der Zeitraum bis zum ersten Extremum von der Verschlußzeit abhängt, hat auf die Bemessung des Wasserschlosses keinen Einfluß.

5.2. Einfachschaltfälle

Die Lastfälle "plötzliches Schließen" (LF 1) und "plötzliches Öffnen" (LF 2) sind die ungünstigsten theoretischen Einzelschaltfälle, die traditionell zur Bestimmung der extremen Spiegellagen und der Dämpfung eines Wasserschlosses herangezogen werden.
Die extremen Spiegellagen in den Wasserschloß-Schächten sind die jeweils ersten Extrema ZM1 im Steigschacht und Z1M1 im Hauptschacht. Sie sind maßgeblich für das Ausbruchsvolumen des Wasserschlosses sowie für die Größe der Druckamplituden im Rohrleitungssystem und an der Drossel.

Die Abb. 5.3 zeigt für den Lastfall 1 exemplarisch die Abhängigkeit der höchsten Spiegellage ZM1 im Steigschacht von den Parametern β/α und γ; die Abb. 5.4 ist die entsprechende Darstellung in Höhenlinien.
Für kleine Werte γ, d.h. starke Drosselung, verlaufen die Höhenlinien parallel zur Achse β/α, die Amplituden hängen also nur von der Drosselung, nicht jedoch vom Querschnitt des Hauptschachtes ab. Der Hauptschacht wird kaum in den Schwingungsvorgang einbezogen. Es findet ein Übergang vom Differential- zum Schachtwasserschloß mit dem Querschnitt des Steigschachtes statt.
Für große Werte γ, d.h. für sehr geringe Drosselungen, ist der Übergang zum Schachtwasserschloß mit dem Querschnitt beider Schächte zu erkennen. Die Höhenlinien verlaufen in diesem Bereich nahezu parallel zur Achse γ; die Amplituden werden also nur noch vom Querschnitt des Hauptschachtes beeinflußt. Beide Schächte schwingen mit einer geringen Phasenverschiebung gemeinsam.
Dazwischen ist eine ausgeprägte Differentialwirkung zu beobachten. Bemerkenswert ist das Minimum der Amplituden bei veränderlicher Drosselung und konstanten Querschnitten, das allerdings im Bereich geringer Dämpfung auftritt, so daß es hinsichtlich der Bemessung nur geringe Bedeutung hat.

Die Abb. 5.5 zeigt für den Lastfall 1 exemplarisch die Abhängigkeit der höchsten Spiegellage im Hauptschacht von den

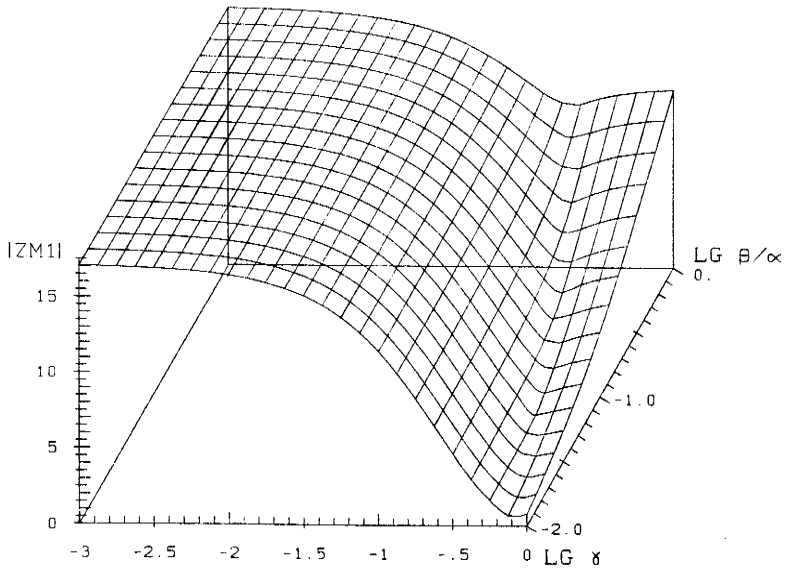


Abb. 5.3: Abhängigkeit der ersten Aufschwingung im Steigschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 1)

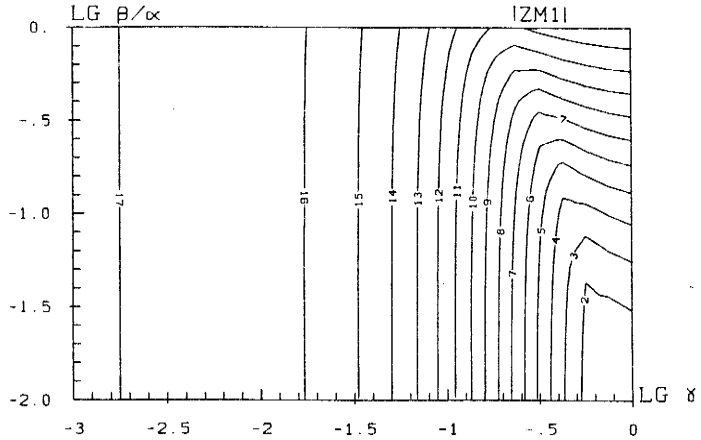


Abb. 5.4: Abhängigkeit der ersten Aufschwingung im Steigschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 1)

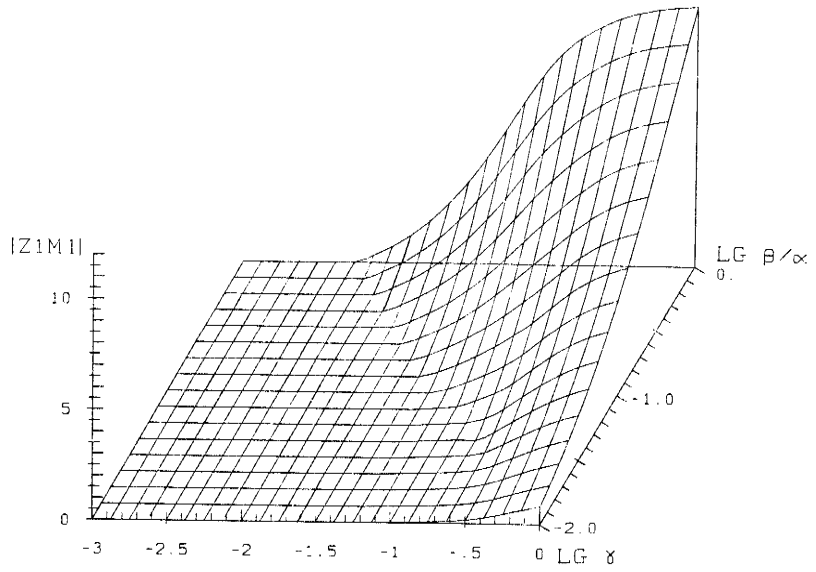


Abb. 5.5: Abhängigkeit der ersten Aufschwingung im Hauptschacht von den Parametern β/α und γ ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; LF 1)

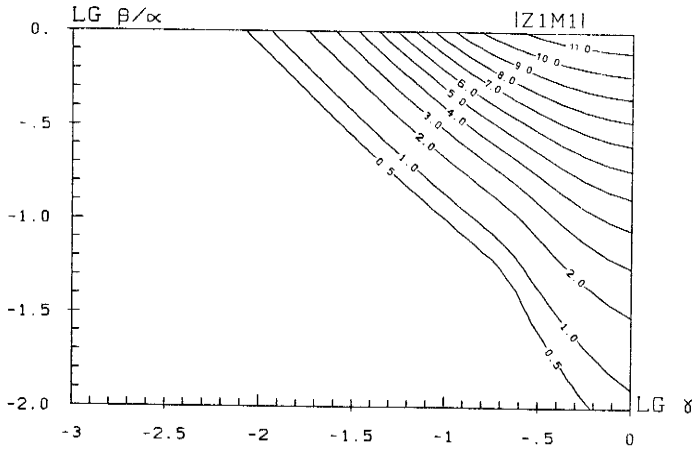


Abb. 5.6: Abhängigkeit der ersten Aufschwingung im Hauptschacht von den Parametern β/α und γ ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; LF 1)

Parametern β/α und γ; die Abb. 5.6 ist die zugehörige Darstellung in Höhenlinien. Die Amplituden im Hauptschacht vergrößern sich bei abnehmender Drosselung und abnehmendem Querschnitt. Bei starker Drosselung, also kleinen Werten γ, ist der Hauptschacht kaum noch an der Schwingung beteiligt. Bei sehr geringer Drosselung ($\lg \gamma \to 0$) stimmen die Amplituden in beiden Schächten überein.

Die Dämpfung wurde in der Gleichung (4.26) als Quotient der auf den stationären Zustand bezogenen ersten beiden gleichgerichteten Amplituden definiert. Die Abb. 5.7 und 5.8 zeigen exemplarisch die Abhängigkeit der zweiten Aufschwingung ZM3 im Steigschacht von den Parametern β/α und γ. Für extreme Drosselungen zeigen sich wieder die Übergänge zu Schachtwasserschlössern. Auffällig ist ein Bereich sehr kleiner Amplituden, also sehr großer Dämpfungen. Dieser Bereich ist bei kleinen Hauptschacht-Querschnitten sehr schmal und wird für große Querschnitte immer breiter. Sein linker Rand verläuft fast parallel zur Achse β/α, ist also hauptsächlich von der Drosselung γ abhängig.

Aufschluß über die Abhängigkeit der Dämpfung von der Wahl der Parameter geben die Abb. 5.9 und 5.10, in denen die Dämpfung in den Lastfällen 1 und 2 aufgetragen ist.
Für extreme Drosselungen sind die Dämpfungen beim Übergang zu Schachtwasserschlössern gering, während sich dazwischen eine Zone sehr hoher Dämpfungen befindet. Diese Zone hat die Form eines Höhenrückens, dessen linke Flanke wesentlich steiler ist als die rechte. Der Grat des Rückens verläuft nahezu parallel zur Achse β/α; er markiert die maximale Dämpfung. Das bedeutet, daß eine Bemessung auf maximale Dämpfung im wesentlichen über die Drosselung erfolgt. Die Lage dieses Maximums ist in beiden Lastfällen weitgehend identisch, jedoch ist die Dämpfung im Lastfall 2 größer, da die Schwingung bei hohen Durchflußgeschwindigkeiten stärker gedämpft wird. In der Abb. 5.11 ist die Abhängigkeit der Drosselung γ für maximale Dämpfung von den Parametern β/α und ε/α dargestellt.

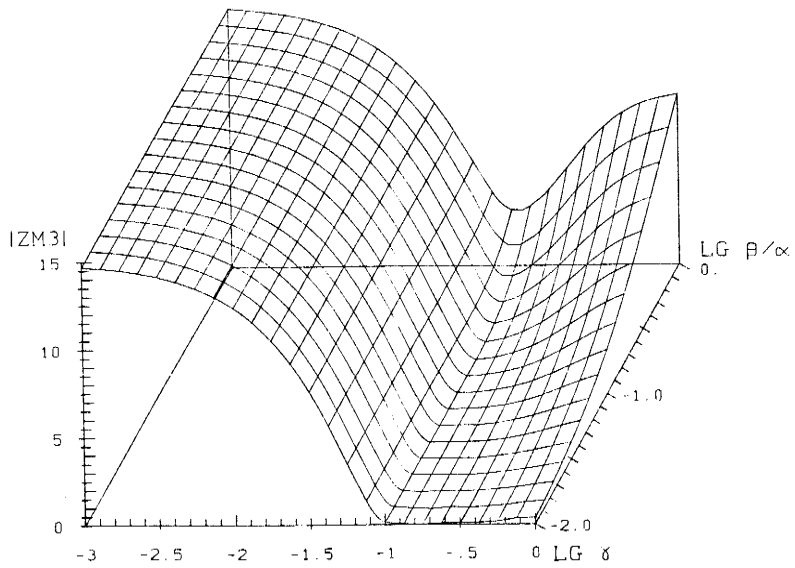


Abb. 5.7: Abhängigkeit der zweiten Aufschwingung im Steigschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 1)

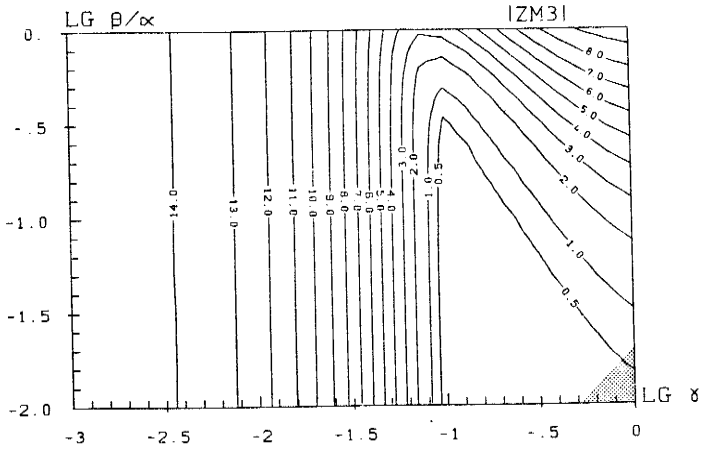


Abb. 5.8: Abhängigkeit der zweiten Aufschwingung im Steigschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 1)

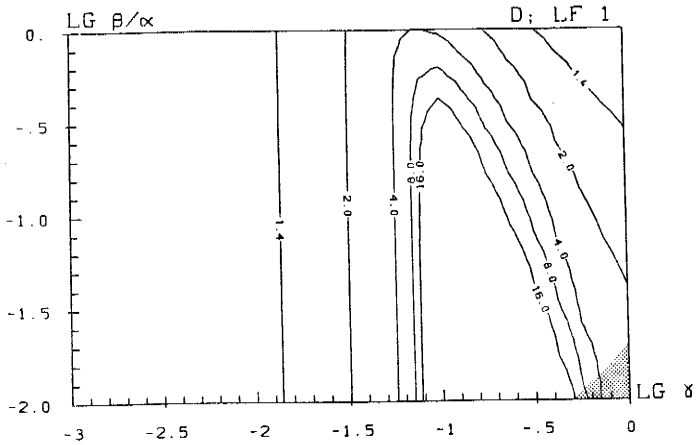


Abb. 5.9: Abhängigkeit der Dämpfung von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = - 2,5 ; LF 1)

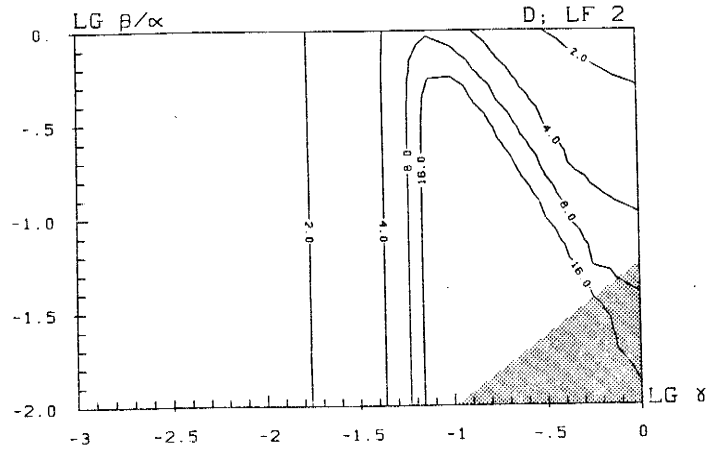


Abb. 5.10: Abhängigkeit der Dämpfung von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = - 2,5 ; LF 2)

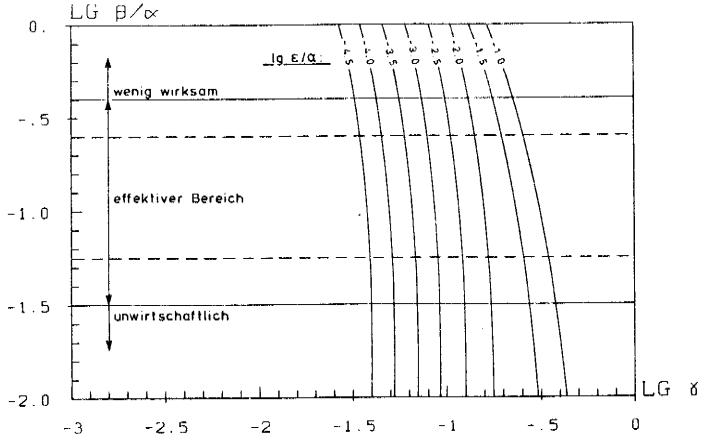


Abb. 5.11: Abhängigkeit des Drosselparameters γ für maximale Dämpfung von den Parametern ε/α und β/α

Eine für die Bemessung relevante Abhängigkeit der Dämpfung vom Querschnitt des Hauptschachtes besteht nur bei sehr kleinen Querschnitten, also großen Werten β/α. Die Dämpfung in diesem Bereich ist für Differentialwasserschlösser noch relativ gering, so daß vorausgesetzt werden sollte, daß der Querschnitt des Hauptschachtes größer ist als der doppelte Steigschacht-Querschnitt. Je größer der Querschnitt des Hauptschachtes gewählt wird, desto sicherer ist diese Bemessung hinsichtlich der Dämpfung, und desto schwächer kann die Drosselung gewählt werden. Bei sehr großen Hauptschacht-Querschnitten müssen allerdings Wirtschaftlichkeitsüberlegungen angestellt werden.

In den Abbildungen 5.12 und 5.13 sind typische Schwingungsverläufe von Differentialwasserschlössern dargestellt. Der jeweils mittlere Schwingungsverlauf ist in beiden Abbildungen gleich; die Drosselung wurde für maximale Dämpfung näherungsweise nach Abbildung 5.11 bestimmt, und der Hauptschacht hat den zehnfachen Querschnitt des Steigschachtes. In der Abbildung 5.12 wurde bei konstanten Querschnitten die Drosselung variiert. Beim oberen Schwingungsverlauf wurde die Drosselung zu stark gewählt, so daß der Hauptschacht kaum in die Schwingung

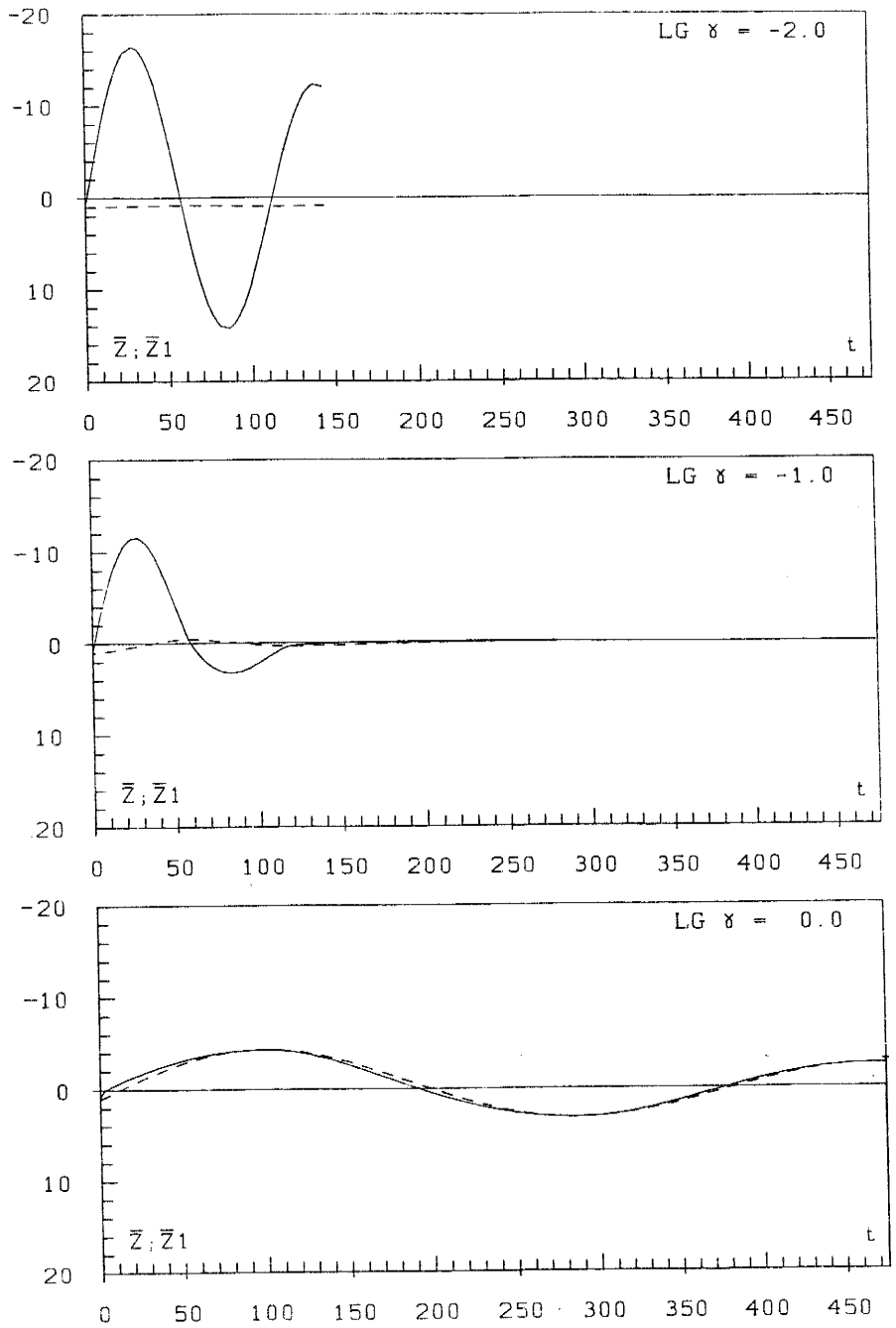


Abb. 5.12: Schwingungsverläufe von Differentalwasserschlössern ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$) Variation der Drosselung

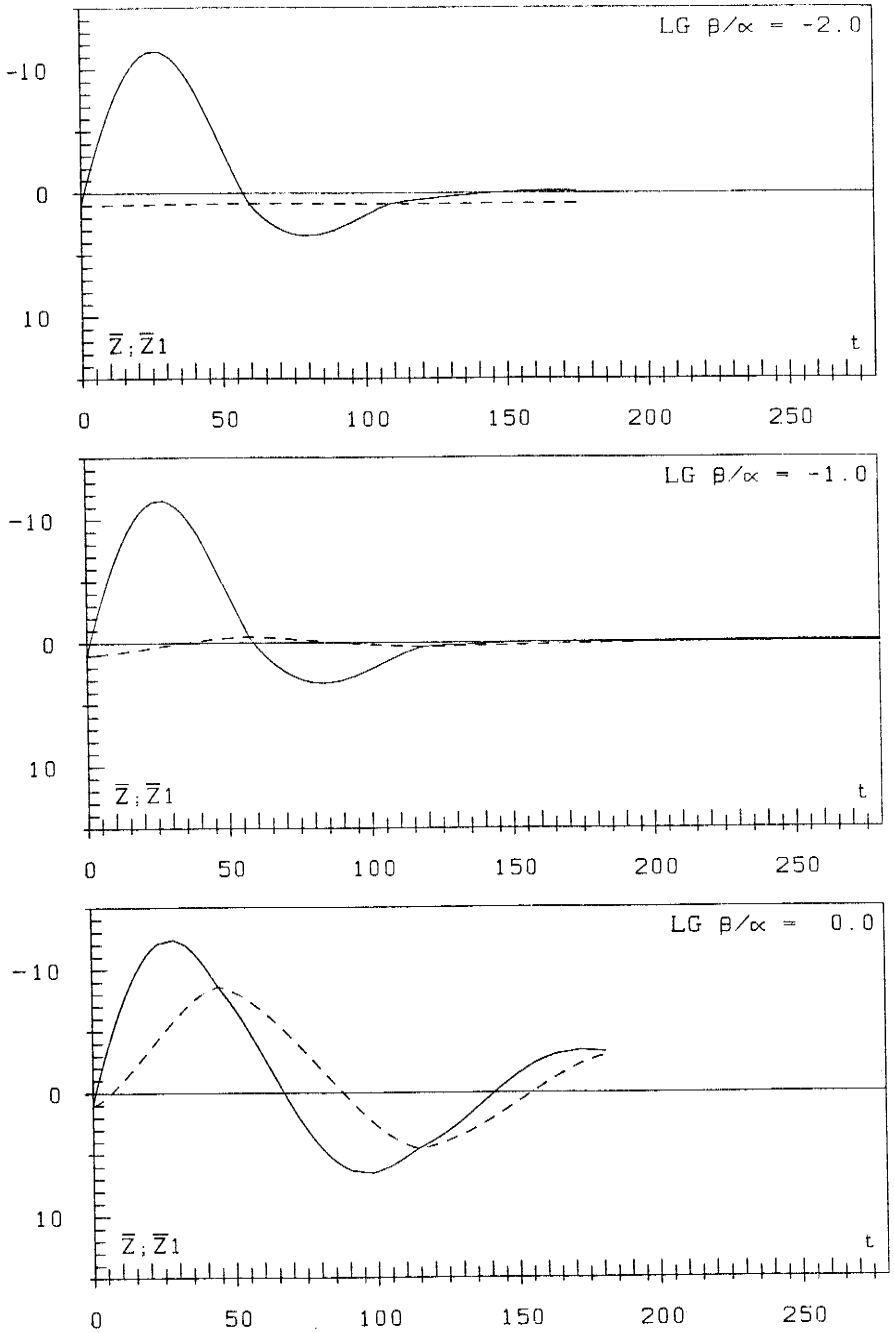


Abb. 5.13: Schwingungsverläufe von Differentialwasserschlössern ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; $\lg \gamma = -1{,}0$) Variation des Hauptschacht-Querschnittes

einbezogen wird. Beim unteren Schwingungsverlauf ist die Drosselung zu schwach, so daß die Schächte gemeinsam schwingen.
In der Abbildung 5.13 wurde bei konstanter Drosselung der Hauptschacht-Querschnitt verändert. Dem oberen Schwingungsverlauf liegt eine unwirtschaftliche Bemessung zugrunde. Die Schwingung wird total gedämpft, ohne daß der Wasserspiegel im Hauptschacht seine Lage wesentlich ändert. Für den unteren Schwingungsverlauf wurden die Querschnitte der Schächte gleichgesetzt; die Dämpfung ist für ein Differentialwasserschloß unbefriedigend.

Die vollständigen Unterlagen zur Bestimmung der Amplituden im gesamten untersuchten Parameterbereich sind für den Lastfall 1 in der Anlage III und für den Lastfall 2 in der Anlage IV beigefügt.

5.3. Mehrfachschaltfälle

5.3.1. Bestimmung der maßgeblichen Schaltzeitpunkte

Zur Bestimmung des maßgeblichen Schaltzeitpunktes t_z für die Lastfälle 4 und 5 wurde für verschiedene Parameter-Kombinationen der Zeitpunkt der zweiten Regelung variiert.

In der Abbildung 5.14 sind Beispiele für Schwingungsverläufe in Differentialwasserschlössern bei verschiedenen Schaltzeitpunkten für plötzliches Schließen und anschließendes plötzliches Öffnen dargestellt. Die Schaltzeitpunkte sind markiert; der Schwingungsverlauf im zugehörigen Einfachschaltfall ist den Abbildungen 5.12 und 5.13 zu entnehmen.
Beim oberen Schwingungsverlauf wurde zum Zeitpunkt des ersten Maximums TM1 erneut geschaltet, im unteren Bild zum Zeitpunkt des ersten Minimums TM2. In beiden Fällen knickt der Schwingungsverlauf im Steigschacht ab. Die niedrigste Spiegellage hat die Größenordnung der Spiegellagen bei den Einfachschaltfällen.
Im mittleren Schwingungsverlauf wurde beim Durchgang des Wasserspiegels im Steigschacht durch die Ruhelage wieder geöffnet. Es erfolgt eine weitere Beschleunigung des Absinkens des Wasserspiegels, wodurch die Amplitude wesentlich zunimmt.

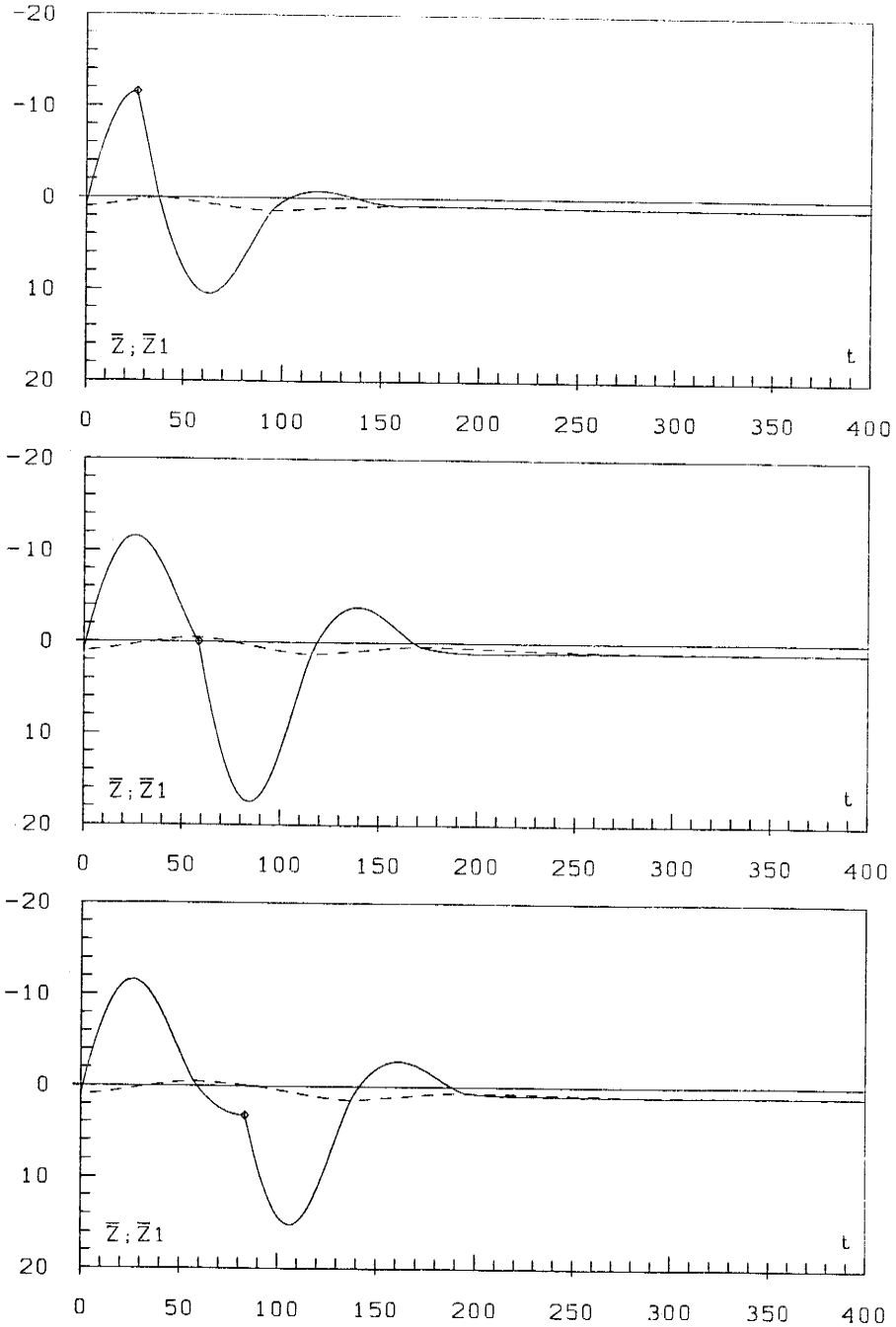


Abb. 5.14: Schwingungsverläufe für Differentialwasserschlösser unter dem Mehrfachschaltfall "Schließen - Öffnen"; lg ε/α = -2,5; lg β/α = -1,0; lg γ = -1,0; Variation des zweiten Schaltzeitpunktes t_z

Die Dämpfung ist in allen drei Fällen total. Die Bemessung auf totale Dämpfung ist also auch bei Mehrfachschaltfällen effektiv.

In der Abbildung 5.15 ist der Schwingungsverlauf im Lastfall 1 für die gleiche Parameterkombination zwischen den Zeitpunkten der ersten Extrema TM1 und TM2 aufgetragen. Zusätzlich enthält dieses Bild die Verläufe des Durchflusses q, der Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels im Steigschacht $d\bar{z}/dt$ und der Spiegeldifferenz zwischen den Schächten $\bar{z}_1 - \bar{z}$. Diesen Kurven gegenübergestellt ist die Einhüllende der zweiten Amplitude ZMIN in Abhängigkeit vom Schaltzeitpunkt t_z. Der Zeitpunkt des Auftretens dieses Extremums ist nicht berücksichtigt.

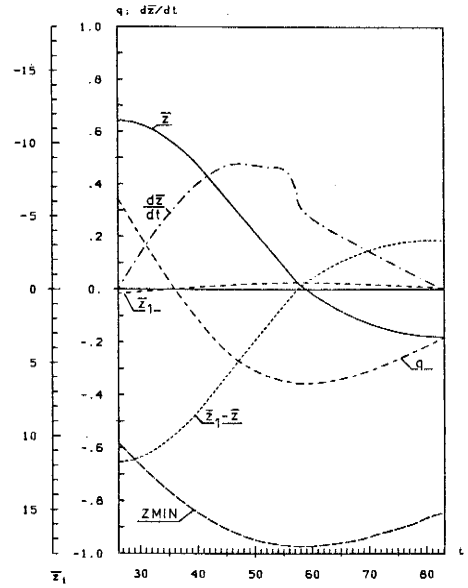


Abb. 5.15: Schwingungsverlauf im Differentialwasserschloß (lg ε/α = -2,5 ; lg β/α = -1,0 ; lg γ = -1,0) nach plötzlichem Schließen und Amplitude ZMIN nach erneutem plötzlichen Öffnen zum Zeitpunkt t_z

Die größte Amplitude tritt demnach auf, wenn etwa dann geschaltet wird, wenn der Wasserspiegel im Steigschacht die Ruhelage durchquert oder der Durchfluß sein Minimum erreicht. Die Auswertung der in der Anlage V vollständig beigefügten Diagramme hat gezeigt, daß der ungünstigste Schaltzeitpunkt stets in der Umgebung dieser beiden Punkte liegt. Je nach Parameterkombination weichen beide geringfügig davon ab. Das Extremum der Einhüllenden für die zweite Amplitude ist aber so flach, daß eine dieser beiden Abschätzungen etwa den ungünstigsten Schaltzeitpunkt ergibt.
Für den Lastfall 4 wurde der Schaltzeitpunkt so gewählt, daß beim ersten Durchgang des Wasserspiegels im Steigschacht durch die Ruhelage nach dem ersten Maximum erneut geöffnet wird. Die Abweichungen zur größten erreichbaren Amplitude, die bei dieser Festlegung auftreten, liegen in allen überprüften Fällen unter 4 %.

Die Abbildung 5.16 zeigt die entsprechenden Kurven für plötzliches Öffnen und die Einhüllende des zweiten Extremums in Abhängigkeit vom Zeitpunkt des erneuten Schließens für den Lastfall 5. Die maximale Amplitude wird demnach erreicht, wenn zu dem Zeitpunkt erneut geschaltet wird, wenn der Durchfluß q gerade maximal ist, bzw. die Spiegellage im Steigschacht gerade die stationäre Lage ($\bar{z}$ = 1) durchquert. Analog zum Lastfall 4 wird für den Lastfall 5 der Schaltzeitpunkt so gewählt, daß beim Durchgang des Wasserspiegels im Steigschacht durch die stationäre Lage erneut geschlossen wird. Die Ergebnisse, die auf diese Weise erzielt werden, haben die gleiche Qualität wie im Lastfall 4.

Die vollständigen Unterlagen zur Bestimmung des Zeitpunktes des erneuten Schließens im Lastfall 5 sind in der Anlage VI beigefügt.

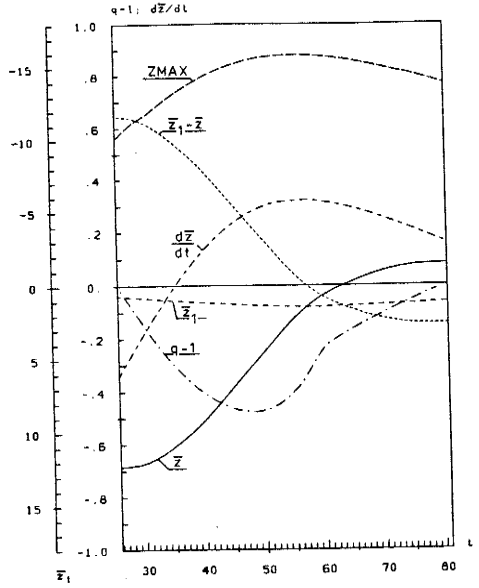


Abb. 5.16: Schwingungsverlauf im Differentialwasserschloß ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$; $\lg \gamma = -1{,}0$) nach plötzlichem Öffnen und Amplitude ZMAX nach erneutem plötzlichen Schließen zum Zeitpunkt t_z

5.3.2. Amplituden

Die Abb. 5.17 und 5.18 zeigen exemplarisch die Abhängigkeit der niedrigsten Spiegellage ZMIN im Steigschacht im Lastfall 4 bzw. der höchsten Spiegellage ZMAX im Lastfall 5 von den Parametern β/α und γ. Für extreme Drosselungen ist der Übergang zu Schachtwasserschlössern zu erkennen. Die Beträge der Amplituden sind deutlich höher als bei den Einfachschaltfällen; für starke Drosselungen erreicht diese Verstärkungswirkung die Größenordnung eines Faktors 2. Mit zunehmender Differentialwirkung wird die Verstärkung geringer, bis sie für sehr große Hauptschächte bei geringer Drosselung ganz verschwindet.

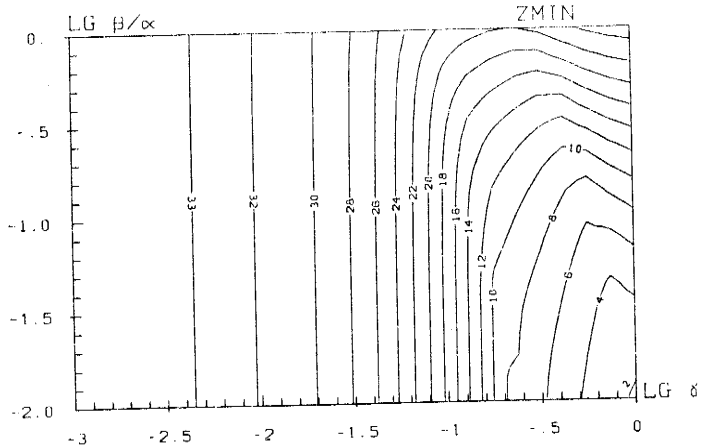


Abb. 5.17: Abhängigkeit der niedrigsten Spiegellage im Steigschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 4)

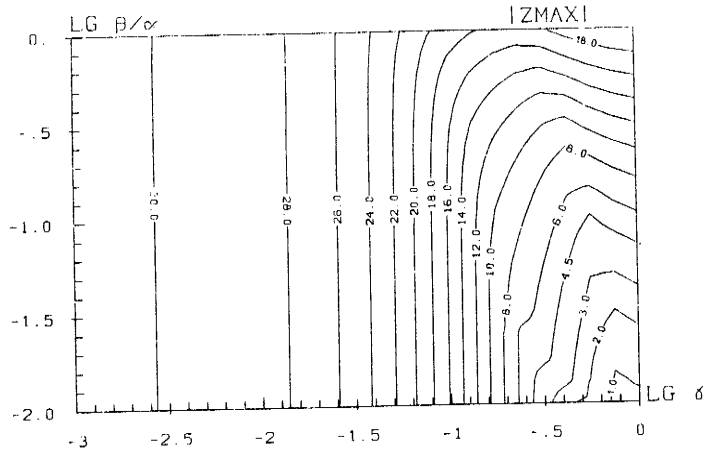


Abb. 5.18: Abhängigkeit der höchsten Spiegellage im Steigschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 5)

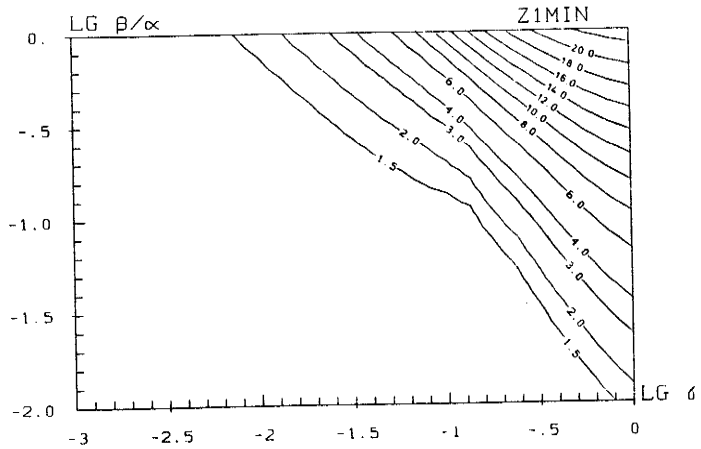


Abb 5.19: Abhängigkeit der niedrigsten Spiegellage im Hauptschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 4)

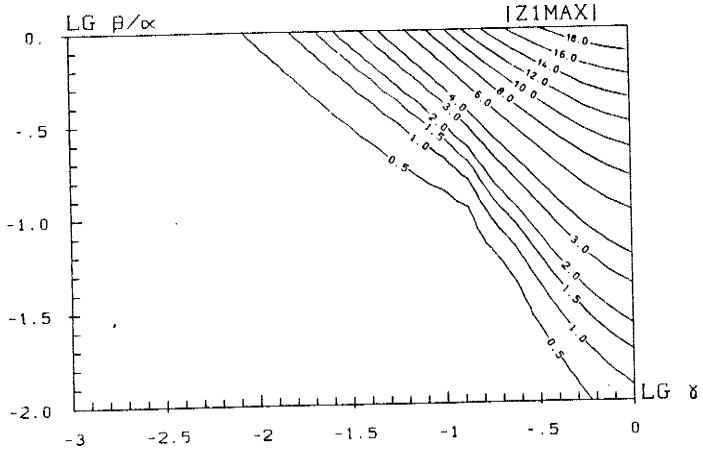


Abb. 5.20: Abhängigkeit der höchsten Spiegellage im Hauptschacht von den Parametern β/α und γ (lg ε/α = -2,5 ; LF 5)

In diesem Bereich werden die Amplituden also durch die Mehrfachschaltung nicht mehr angeregt. In der Zone, die für die Bemessung eines Differentialwasserschlosses in Frage kommt, hat der Verstärkungsfaktor eine Größenordnung von etwa 1,2 bis 1,4.

Die Abb. 5.19 und 5.20 sind die entsprechenden Diagramme für die Amplituden im Hauptschacht. Auch diese ähneln denen für die Einfachschaltfälle. Für geringe Drosselung sind die Amplituden vergrößert, und diese Verstärkung nimmt mit zunehmendem Hauptschacht-Querschnitt und zunehmender Drosselung ab. Bei starker Drosselung sind die Amplituden im Hauptschacht schließlich geringer als bei den Einfachschaltfällen, denn der Wasserspiegel im Hauptschacht ist zum Zeitpunkt der Regelung ausgelenkt und kann wegen der starken Drosselung und der schnellen Spiegeländerung im Steigschacht dem Steigschachtspiegel nicht folgen, so daß die Amplitude vermindert wird.
In dem für die Bemessung relevanten Parameterbereich ist die Verstärkung der Amplituden im Hauptschacht gering. Dies hat eine große Bedeutung für die Leistungsfähigkeit der Differentialwasserschlösser unter Mehrfachschaltfällen. Denn, wenn sich die Amplitude im Hauptschacht nicht wesentlich anfachen läßt, besteht auch keine Resonanzgefahr für das Gesamtsystem.

Die vollständigen Ergebnisse für die Amplituden sind für den Lastfall 4 in der Anlage VII, für den Lastfall 5 in der Anlage VIII beigefügt.

5.4. Stabilität

Das Stabilitätskriterium nach Thoma wird traditionell zur Bestimmung des Mindestquerschnitts des Wasserschlosses herangezogen. Es wurde gezeigt, daß man den Begriff der Stabilitätsgrenze über die einzuhaltende Mindestfallhöhe für ein gegebenes Wasserschloß neu definieren kann. In der Abb. 5.21 sind typische Beispiele für Schwingungsverläufe in einem Differentialwasserschloß bei unterschiedlichen Fallhöhen und Regelung auf konstante Leistung dargestellt.

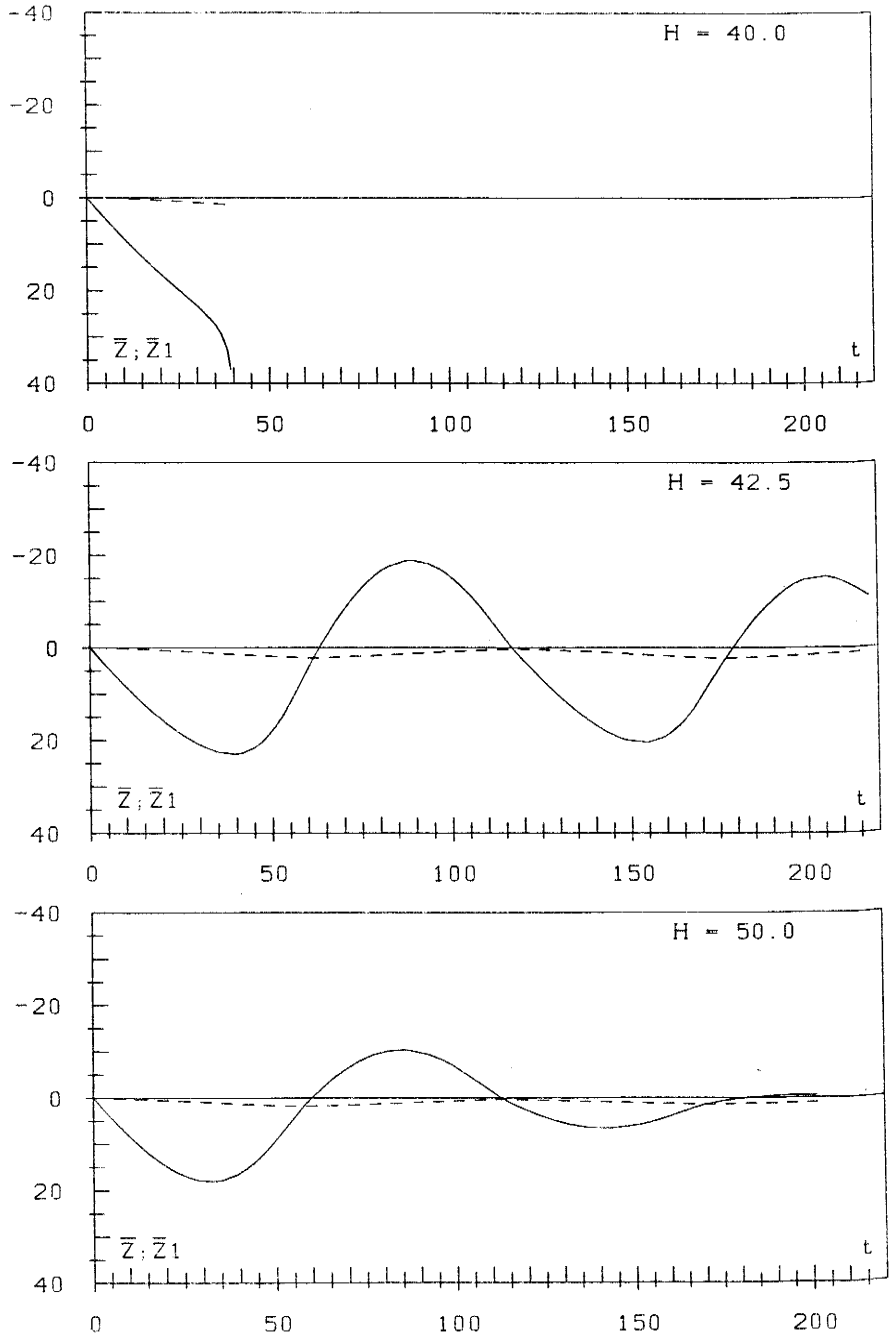


Abb. 5.21: Schwingungsverläufe im Differentialwasserschloß
($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$; $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$; $\lg \gamma = -1{,}0$)
Variation der Fallhöhe

Der obere Schwingungsverlauf ist instabil; der Wasserspiegel im Steigschacht sinkt unter ständiger Beschleunigung gegen unendlich ab. In der Praxis würde Luft in die Rohrleitung angesaugt und das System zerstört werden.
Bereits eine geringfügige Erhöhung der Fallhöhe erzeugt einen stabilen Schwingungsverlauf, der allerdings nahezu ungedämpft ist. Wird die Fallhöhe weiter erhöht, verbessert sich die Dämpfung erheblich. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Erhöhung der Fallhöhe vom instabilen zum stark gedämpften Fall nur 25 % beträgt. Bei der Bemessung ist also ein ausreichender Sicherheitsabstand einzuhalten.
Die Abb. 5.22 zeigt exemplarisch die Abhängigkeit der dimensionslosen Mindestfallhöhe von den Parametern β/α und γ; die Abb. 5.23 ist die entsprechende Darstellung in Höhenlinien. Für extreme Drosselungen zeigt sich auch hier der Übergang zu Schachtwasserschlössern. Bei großen Hauptschacht-Querschnitten und geringer Drosselung ist die Mindestfallhöhe am kleinsten. Im Bereich mittlerer bis kleiner Hauptschacht-Querschnitte zeigt sich hinsichtlich der Drosselung ein deutliches Minimum. Es markiert für $\lg \beta/\alpha = 0$ etwa die Lage der Drosselung für maximale Dämpfung nach Abb. 5.11, weicht jedoch bei größeren Hauptschacht-Querschnitten davon zu den schwächeren Drosselungen hin ab.
Bei großen Hauptschacht-Querschnitten hängt die Mindestfallhöhe nur von der Drosselung ab. Die bisher überwiegend vertretene Meinung, daß sich ein Differentialwasserschloß hinsichtlich der Stabilität so verhält wie ein Schachtwasserschloß mit dem um einen Teil des Hauptschacht-Querschnittes erhöhten Querschnitt des Steigschachtes, ist in weiten Parameterbereichen zu ungünstig. Vielmehr wird im Bereich hoher Dämpfungen gegenüber vergleichbaren Schachtwasserschlössern eine erhebliche Verbesserung der Stabilität erzielt.
In der Anlage IX sind die vollständigen Unterlagen über die Mindestfallhöhen von Wasserkraftanlagen mit Differentialwasserschlössern beigefügt.
Die Abb. 5.24 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Parameter ε/α, der das System Triebwasserleitung - Steigschacht beschreibt,

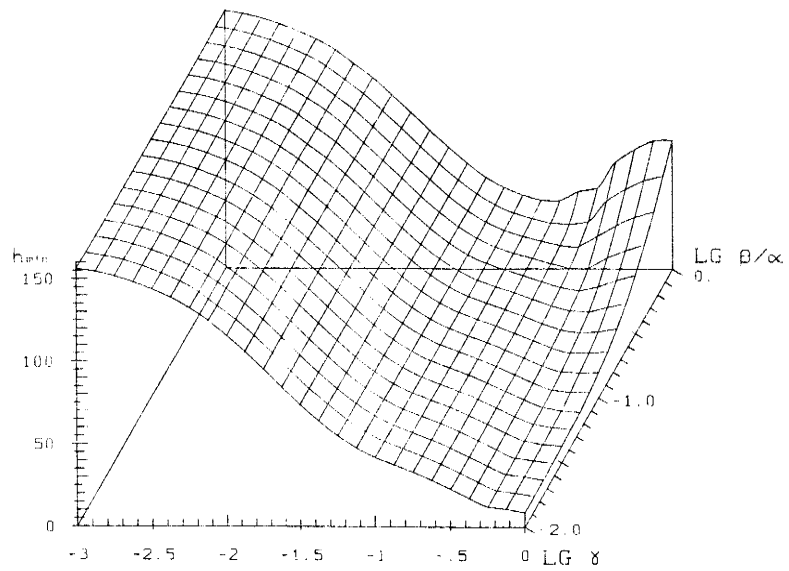


Abb. 5.22: Abhängigkeit der Mindestfallhöhe von den Parametern β/α und γ ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$)

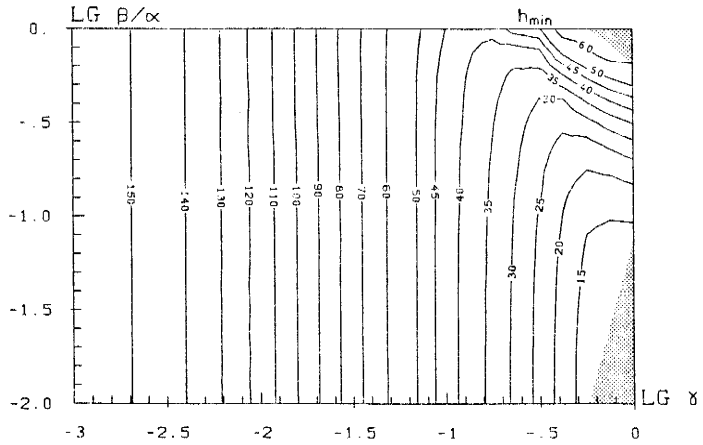


Abb. 5.23: Abhängigkeit der Mindestfallhöhe von den Parametern β/α und γ ($\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}5$)

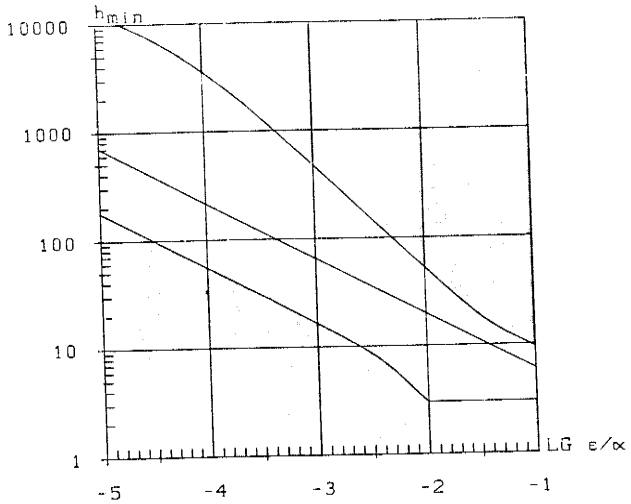


Abb. 5.24: Zusammenhang zwischen ε/α und h_{min}

und der Mindestfallhöhe h_{min}. Der nicht unterlegte Bereich zeigt die Spanne, die im gewählten Definitionsbereich der Parameter von Differentialwasserschlössern abgedeckt wird. Die obere Linie markiert die Werte für lg γ = -3,0; die untere Linie ergibt sich aus den Werten für lg γ = 0,0 und lg β/α = -2,0. Die Gerade ist die einzuhaltende Mindestfallhöhe für Differentialwasserschlösser mit γ nach Abb. 5.11 und lg β/α = -1,0.
Mit Hilfe dieser Abbildung ist eine Vorbemessung des Steigschacht-Querschnittes nach dem Stabilitätskriterium möglich. Wenn die dimensionslose Fallhöhe h der Anlage bekannt ist, kann unter Einbeziehung eines Sicherheitsfaktors die Größenordnung des kleinsten wählbaren Parameters ε/α bestimmt werden. Wenn der Parameter ε für die Eigenschaften der Triebwasserleitung bekannt ist, kann so über den Parameter α der erforderliche Querschnitt des Steigschachtes abgeschätzt werden.

6. Verifikation der Ergebnisse

6.1. Vergleich mit bekannten Daten

Differentialwasserschlösser gehen für extreme Drosselungen in Schachtwasserschlösser über. Zum Vergleich wurden daher für $\gamma = 0$ Schachtwasserschlösser berechnet. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die Amplituden in Schachtwasserschlössern für die Lastfälle "plötzliches Schließen" und "plötzliches Öffnen". Diese Daten lassen sich durch den Vergleich mit den bekannten Ergebnissen für Schachtwasserschlösser belegen, z.B. nach Stucky [10] (Index St) mit

$$\left.\begin{aligned} p_{o(St)} &= \sqrt{\varepsilon/\alpha} \\ z_{(St)} &= \bar{z}\cdot p_{o(St)} \end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

In der Abbildung 6.3 sind die Mindestfallhöhen für Schachtwasserschlösser nach Thoma nach Gl. (3.39) und aus dem mathematischen Modell für Differentialwasserschlösser mit $\gamma = 0$ aufgetragen. Die Abweichungen der numerischen Lösung von den Ergebnissen von Thoma im Bereich $10^{-1,5} < \varepsilon/\alpha < 10^{0}$ sind dadurch zu erklären, daß Thoma's Voraussetzung, daß die Amplituden klein sind gegenüber der Fallhöhe, hier nicht mehr gilt.

Aus den Parametern für die Differentialwasserschlösser mit extremer Drosselung lassen sich für die zugehörigen Schachtwasserschlösser folgende Parameter bestimmen:

- für Differentialwasserschlösser mit $\gamma \to 0$:

$$A' = A \quad ; \quad \varepsilon/\alpha' = \varepsilon/\alpha \qquad (6.2)$$

- für Differentialwasserschlösser mit $\gamma \to \infty$

$$A' = A + A_1 \quad ; \quad \varepsilon/\alpha' = \varepsilon/\alpha\cdot(1 + \alpha/\beta) \qquad (6.3)$$

In allen überprüften Fällen wurde Übereinstimmung festgestellt, so daß die ersten Amplituden im Steig- und Hauptschacht für die Einfachschaltfälle und die Mindestfallhöhe als gesichert angesehen werden können.

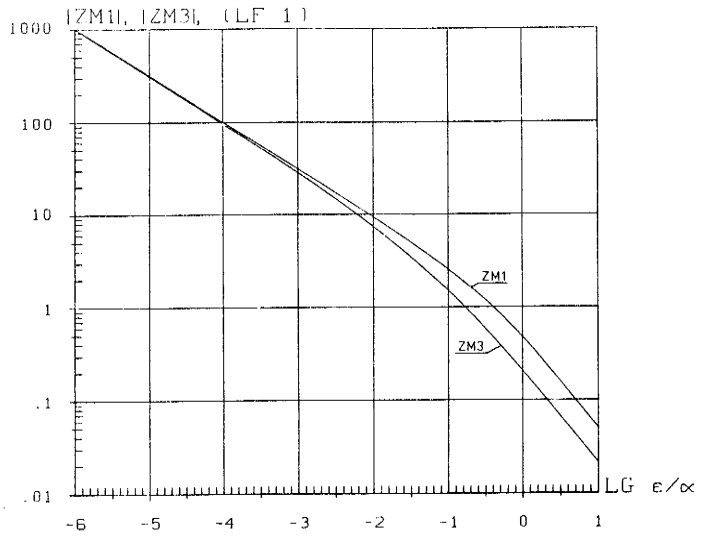


Abb. 6.1: Amplituden von Schachtwasserschlössern nach plötzlichem Schließen

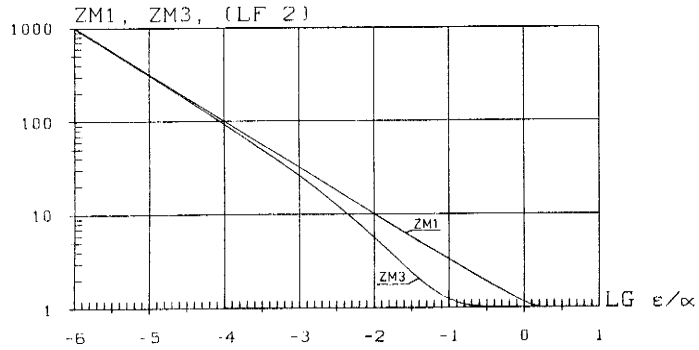


Abb. 6.2: Amplituden von Schachtwasserschlössern nach plötzlichem Öffnen

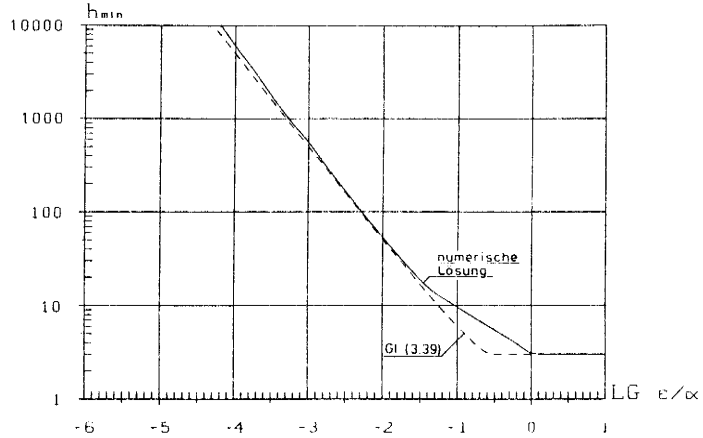


Abb. 6.3: Mindestfallhöhe von Wasserkraftanlagen mit einem Schachtwasserschloß

Zur weiteren Verifikation können die Arbeiten von Heinl [3] und Morgenstern [8] herangezogen werden.

Die Anlage III enthält Diagramme zur Bestimmung der ersten beiden Aufschwingungen im Steigschacht und der ersten Amplitude im Hauptschacht nach einem plötzlichen Schließen. Morgenstern hat seiner Arbeit Diagramme zur Bestimmung der ersten Aufschwingung im Steigschacht nach einem plötzlichen Schließen beigefügt. Nach Umrechnung auf die Parameter von Morgenstern (Index M)

$$\varepsilon_M = \varepsilon/\alpha \quad ; \quad \alpha_M = \alpha/\beta \quad ; \quad \beta_M = \gamma\cdot\frac{\beta}{\alpha} \quad ; \quad y_{i,M} = \bar{z}_i \qquad (6.4)$$

können die Ergebnisse verglichen werden. Bei punktweiser Überprüfung wurde Übereinstimmung festgestellt.

Heinl hat die Stabilität von Differentialwasserschlössern untersucht. Die Diagramme der Anlage IX können nach Umrechnung der Parameter mit seinen Ergebnissen verglichen werden. Für die Parameter nach Heinl ergibt sich an der Stabilitätsgrenze:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{2}{h_{min} - 1} \quad ; \quad R_1 = \frac{1}{h_{min} - 1}\cdot\frac{1}{\gamma^2} \\ S &= 2\cdot\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(h_{min} - 1) \quad ; \quad S_1 = 2\cdot\frac{\varepsilon/\alpha}{\beta/\alpha}\cdot(h_{min} - 1) \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

Bei punktweiser Überprüfung wurde auch hier Übereinstimmung festgestellt.

6.2. Physikalisches Modell

Zur Verifikation der Ergebnisse für Einfach- und Mehrfachschaltfälle wurde ein physikalisches Modell gebaut, an dem für bestimmte Randbedingungen Schwingungsverläufe gemessen werden können. Dieses Modell besteht nach der Abbildung 6.4 aus folgenden Bauteilen (siehe dazu auch Anlage I):

- einem Behälter, der in einem geschlossenen Kreislauf beide Speicherbecken einer Wasserkraftanlage ersetzt,
- einer Rohrleitung DN 125 für die Triebwasserleitung zwischen dem oberen Speicherbecken und dem Wasserschloß,
- einem Differentialwasserschloß,
- einer Rohrleitung DN 100 für die Triebwasserleitung zwischen dem Wasserschloß, den hydraulischen Maschinen und dem zweiten Speicherbecken.

Das Modell ist mit zwei Maschinensätzen für entgegengesetzte Fließrichtung ausgerichtet. Jeder Maschinensatz besteht aus folgenden Elementen:

- einer Pumpe (inline),
- einem pneumatisch betriebenen Kugelschieber DN 100 als Schnellschluß-Ventil. Die Steuerung der Pneumatik erfolgt über Magnetventile. Die Verschlußzeit beträgt bei 7 bar Betriebsdruck 0,6 s.
- einem handbetriebenen Flachschieber DN 100 als Regelventil zur Einstellung des stationären Durchflusses Q_o.

Die Pumpen und die Pneumatik der Schnellschluß-Ventile werden durch ein programmierbares Steuermodul automatisch bedient. Für beide Fließrichtungen sind folgende Schaltfälle möglich:

- Schließen,
- Öffnen,
- Umkehr der Fließrichtung.

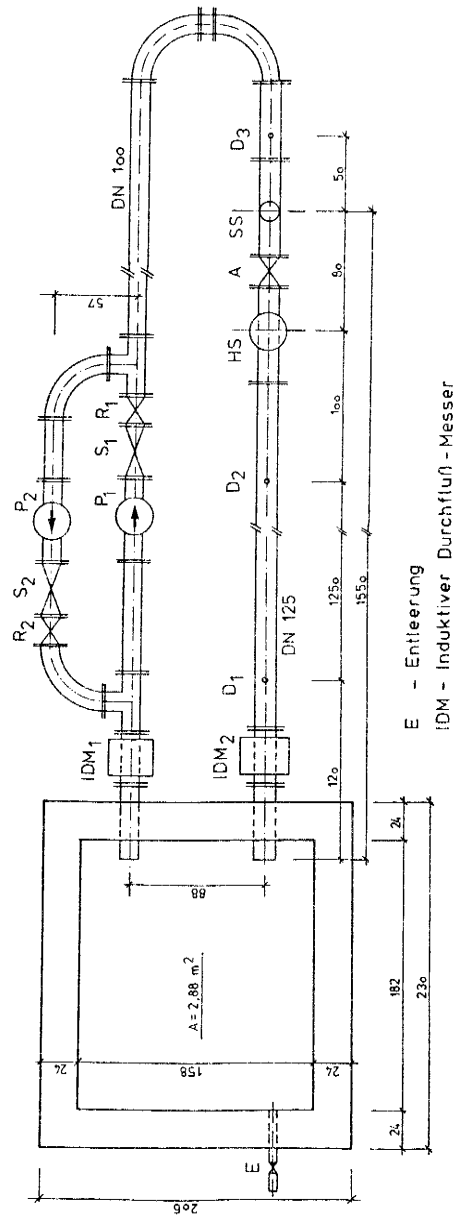


Abb. 6.4: Physikalisches Modell, Grundriß

Diese Einfachschaltfälle lassen sich beliebig kombinieren, wobei jede Schaltfolge durch die Verwendung des programmierbaren Steuermodels exakt reproduzierbar ist.

Das Differentialwasserschloß selbst besteht nach der Abbildung 6.5 aus den folgenden Bauteilen:

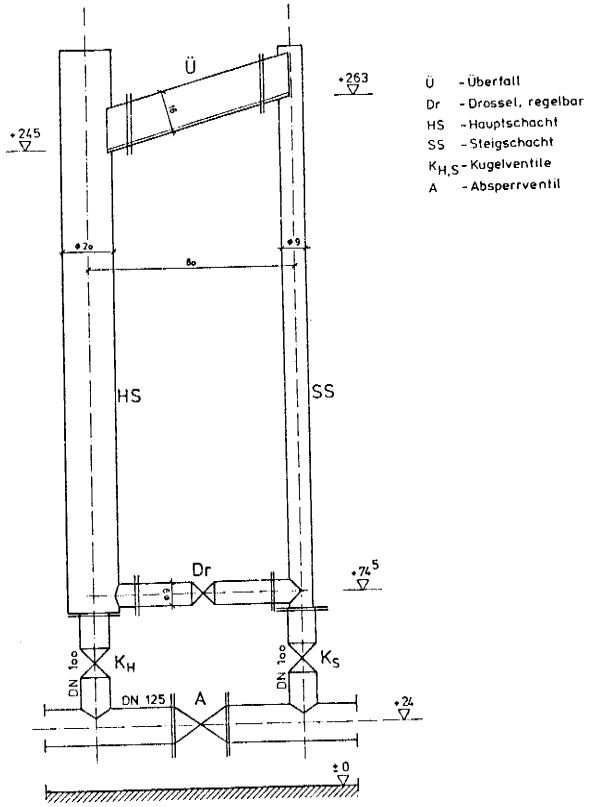


Abb. 6.5: Detail Differentialwasserschloß

- einem Steigschacht,
- einem Hauptschacht,
- einem Überfall zur Begrenzung der Amplituden im Steigschacht nach oben,

- einer Drossel, ausgebildet als Flachschieber mit reproduzierbarer Feineinstellung. Der Querschnitt des Verbindungsrohres zwischen den Schächten ist identisch mit dem des Steigschachtes,
- einem Kugelventil an jedem Schacht zum Fixieren der Wasserspiegel zu Eichzwecken sowie zur Wahl der gewünschten Bauform des Wasserschlosses,
- einem Flachschieber zum Absperren der Triebwasserleitung zwischen den Schächten zur Bestimmung der Verlustbeiwerte der Drossel.

Die für die Wasserschloß-Schwingung relevanten Maße des Modells sind in der Tab. 6.1 zusammengefaßt.

Bauteil	Durchmesser in m	Querschnitt in m^2	Länge in m
Triebwasserleitung	0,1258	$a = 1{,}242 \cdot 10^{-2}$	L = 15,00
Steigschacht	0,0825	$A = 5{,}346 \cdot 10^{-3}$	-
Hauptschacht	0,1925	$A_1 = 2{,}910 \cdot 10^{-2}$	-

Tab. 6.1: Maße des Modells

Die Abbildung 6.6 gibt eine Übersicht über den Aufbau des physikalischen Modells, der Meßgeräte und der Geräte zur Meßwerterfassung.
Zur Messung der Wasserstände im Wasserschloß sind beide Schächte mit Wellenpegeln ausgerüstet. Die Messung des Durchflusses Q_p der Maschinen und des Durchflusses Q der Triebwasserleitung DN 125 erfolgt mit Induktiven Durchfluß-Meßgeräten. Zur Erfassung des Druckverlaufes in der Triebwasserleitung ist diese mit Druckanbohrungen versehen.
Sämtliche Meßwerte werden zentral und automatisch von einem Kleinrechner vom Typ Apple //e erfaßt und über BASIC-Programme aufbereitet. Zusätzlich erfolgt die Ausgabe der Daten über x-t-Schreiber; zu Kontroll- und Eichzwecken sind außerdem Voltmeter angeschlossen.

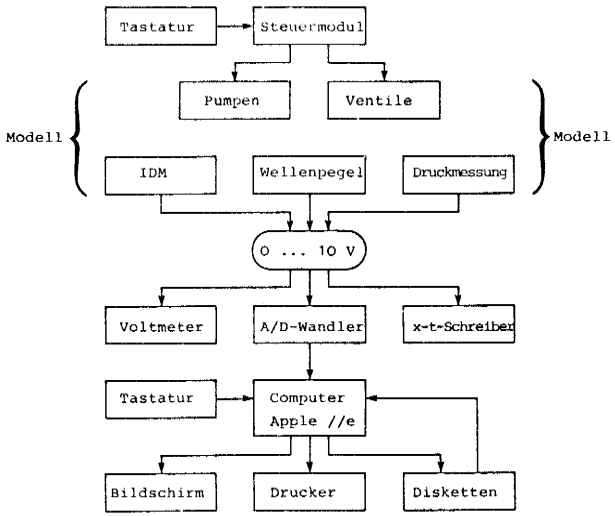


Abb. 6.6: Konfiguration des Modells

Zur Bestimmung des Gesamt-Verlustbeiwertes $\Sigma\zeta$ der Triebwasserleitung wurde in stationärem Betrieb die Höhendifferenz Δh zwischen den Wasserspiegeln im Behälter und im Steigschacht gemessen. Es gilt:

$$\Delta h = \Sigma\zeta \cdot \frac{v_o^2}{2g} \pm \frac{v_o^2}{2g} \qquad \begin{cases} + \text{ Betrieb Pumpe 2} \\ - \text{ Betrieb Pumpe 1} \end{cases} \qquad (6.6)$$

In Kenntnis der Durchflußgeschwindigkeit v_o ergibt sich der Verlustbeiwert $\Sigma\zeta$ als Funktion der Reynoldszahl (Abb. 6.7). Wie mit Hilfe der Druckanbohrungen an der Triebwasserleitung nachgewiesen werden konnte, ist der örtliche Verlust beim Eintreten des Durchflusses in den Behälter wesentlich größer als jener beim Ansaugen des Wassers aus dem Behälter, so daß sich für verschiedene Fließrichtungen unterschiedliche Verlustbeiwerte ergeben. Zudem erfüllt das physikalische Modell nicht die Voraussetzung $\Sigma\zeta >> 1$, die bei der Ableitung der Grundgleichungen des mathematischen Modells gemacht wurde.

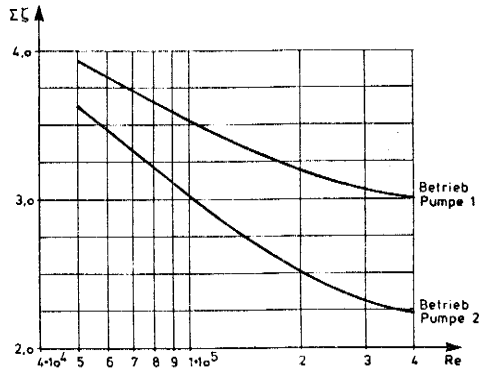


Abb. 6.7: Verlustbeiwert $\Sigma\zeta$

Zur Bestimmung des Verlustbeiwertes ζ_{Dr} der Drossel wurde bei geschlossenem Absperrventil ein stationärer Durchfluß durch die Drossel erzeugt. Die Differenz der Spiegellagen in den Schächten ist dann die Verlusthöhe h_v, die durch die Drossel hervorgerufen wird. Der Wert ζ_{Dr} läßt sich bei bekanntem Durchfluß mit Hilfe der Gleichung (2.3) bestimmen. In der Abbildung 6.8 ist die Abhängigkeit des Verlustbeiwertes ζ_{Dr} vom Öffnungsgrad der Drossel dargestellt:

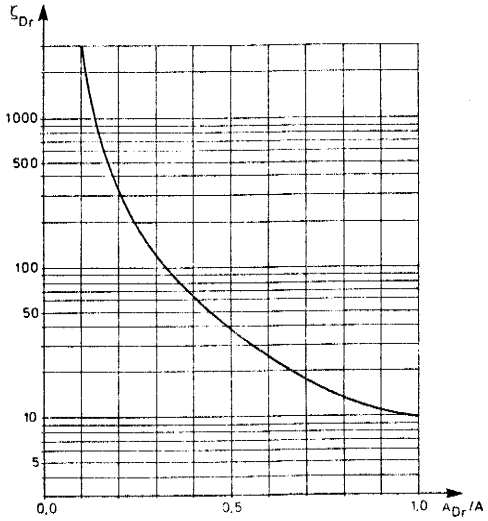


Abb.6.8: Verlustbeiwert ζ_{Dr}

Zu den Versuchen wurde die Pumpe 2 benutzt. Der stationäre Durchfluß betrug $Q_o = 7{,}8 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$. Damit ergibt sich:

$v_o = 0{,}628\ m/s$; $Re = 7{,}9 \cdot 10^4$; $\Sigma\zeta = 3{,}25$

so daß man erhält:

$\varepsilon/\alpha = 3{,}05 \cdot 10^{-3}$; $\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}516$

$\bar{Z}_o = 0{,}0653\ m$; $T_o = 0{,}0448\ s$

Für den Hauptschacht-Parameter β/α gilt:

$\beta/\alpha = 0{,}1837$; $\lg \beta/\alpha = -0{,}736$

Die Drossel wurde so eingestellt, daß mit $\zeta_{Dr} = 325$ gilt:

$\gamma = 0{,}1$; $\lg \gamma = -1{,}0$

Mit Hilfe dieser Werte wurden die Schwingungsverläufe unter Berücksichtigung der Verschlußzeit $T_s = 0{,}6\ s$ im mathematischen Modell berechnet.
Die Abbildung 6.9 zeigt die Schwingungsverläufe nach einem Schließen im physikalischen Modell und nach der Vergleichsrechnung. Der unterschiedliche Wert für die stationäre Spiegellage bei T = 0 beruht auf der Vernachlässigung der Geschwindigkeitshöhe im mathematischen Modell. Im weiteren Verlauf sind die Schwingungsverläufe weitgehend identisch. Die Amplituden sind im Versuch etwas geringer als nach der Rechnung. Dieser Effekt nimmt mit der Zeit zu. Dies ist dadurch zu erklären, daß das instationäre Reibungsverhalten günstiger ist, als es im mathematischen Modell angenommen wurde.

Die Abbildung 6.10 zeigt die Verläufe der Schwingungen nach einem Öffnen im physikalischen Modell und nach der Vergleichsrechnung. Die Amplituden im Versuch sind deutlich geringer als nach dem mathematischen Modell. Die Ursache für diese Abweichung ist darin zu sehen, daß die Beschleunigung der trägen Wassersäule nach dem Öffnen durch die Pumpenkennlinie beschränkt wird.

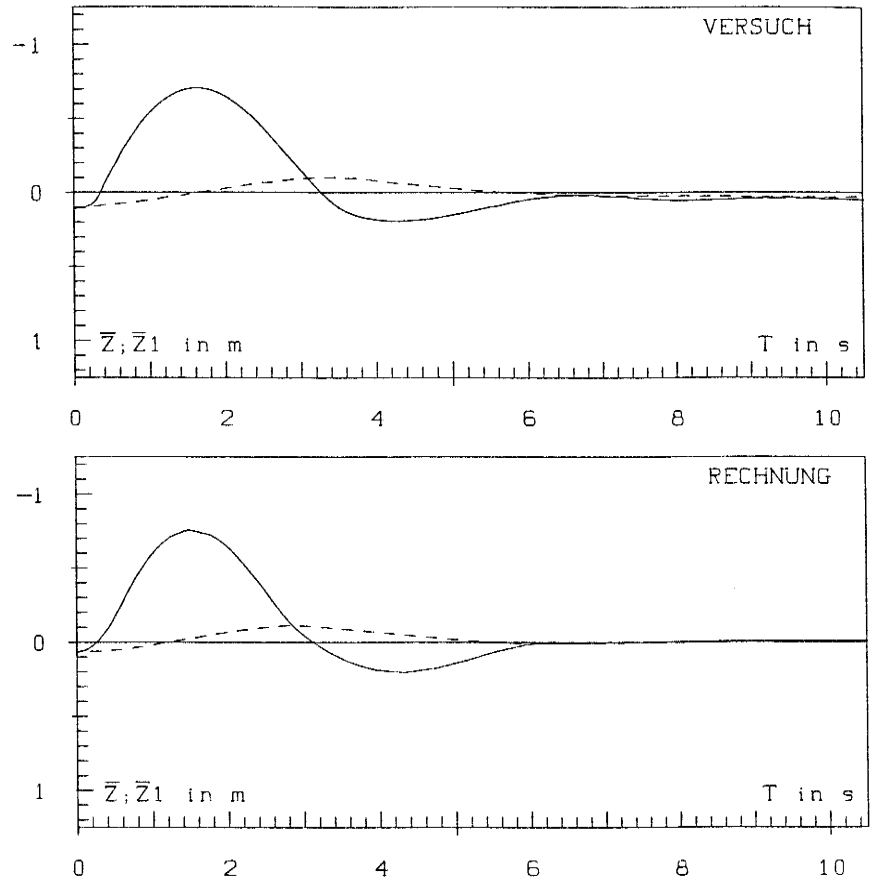


Abb. 6.9: Schwingungsverläufe nach einem Schließen

Der Betrag der ersten Abschwingung ist im physikalischen Modell kleiner als der der ersten Aufschwingung nach einem Schließen. Da diese Schaltfälle mathematisch weitgehend identisch sind, müßte der Betrag der ersten Amplitude nach dem Öffnen aber um die Größenordnung der stationären Auslenkung $\bar{Z}_o$ größer sein als nach dem Schließen. Das physikalische Modell ist also zur Verifikation des Schaltfalles "Öffnen" nur bedingt geeignet.

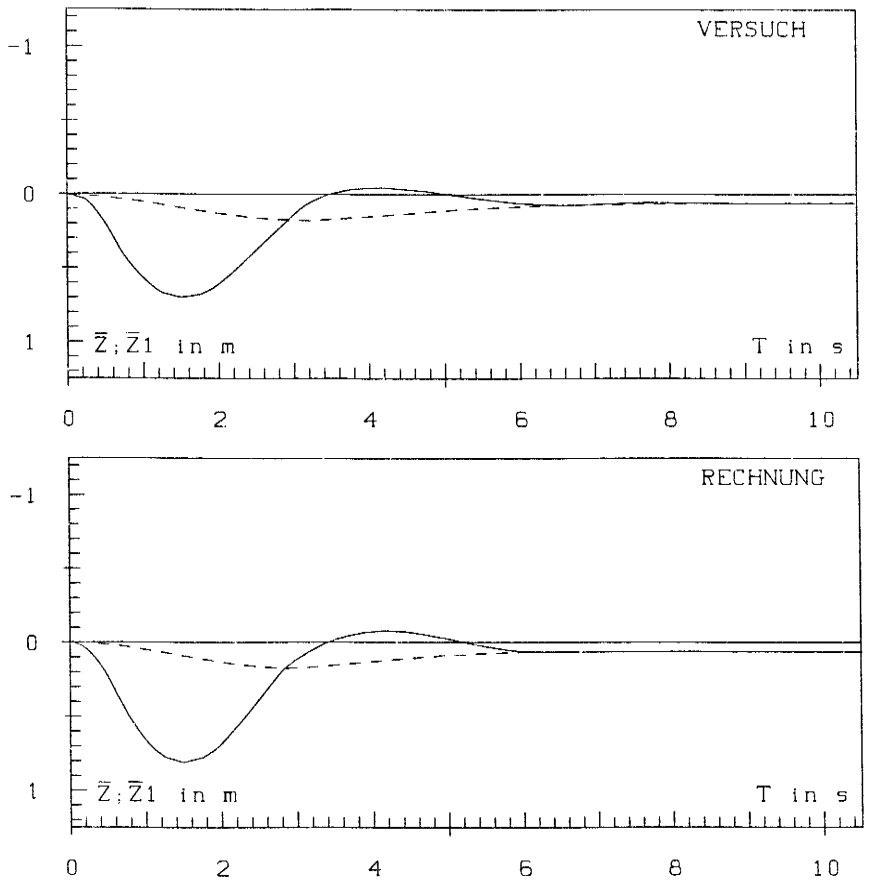


Abb. 6.10: Schwingungsverläufe nach einem Öffnen

Die Abbildung 6.11 zeigt die Schwingungsverläufe in dem Mehrfachschaltfall "Schließen mit anschließendem Öffnen zum Zeitpunkt T_z = 2,9 s". Die Graphen sind bis zum Zeitpunkt T_z mit denen der Abbildung 6.9 identisch. Die niedrigste Spiegellage nach dem Öffnen ergibt sich nach der Rechnung deutlich niedriger als im Versuch. Dies war nach dem Ergebnis für den Einfachschaltfall "Öffnen" so zu erwarten, zumal die zweite Schaltung zu einem sehr kritischen Zeitpunkt erfolgt.

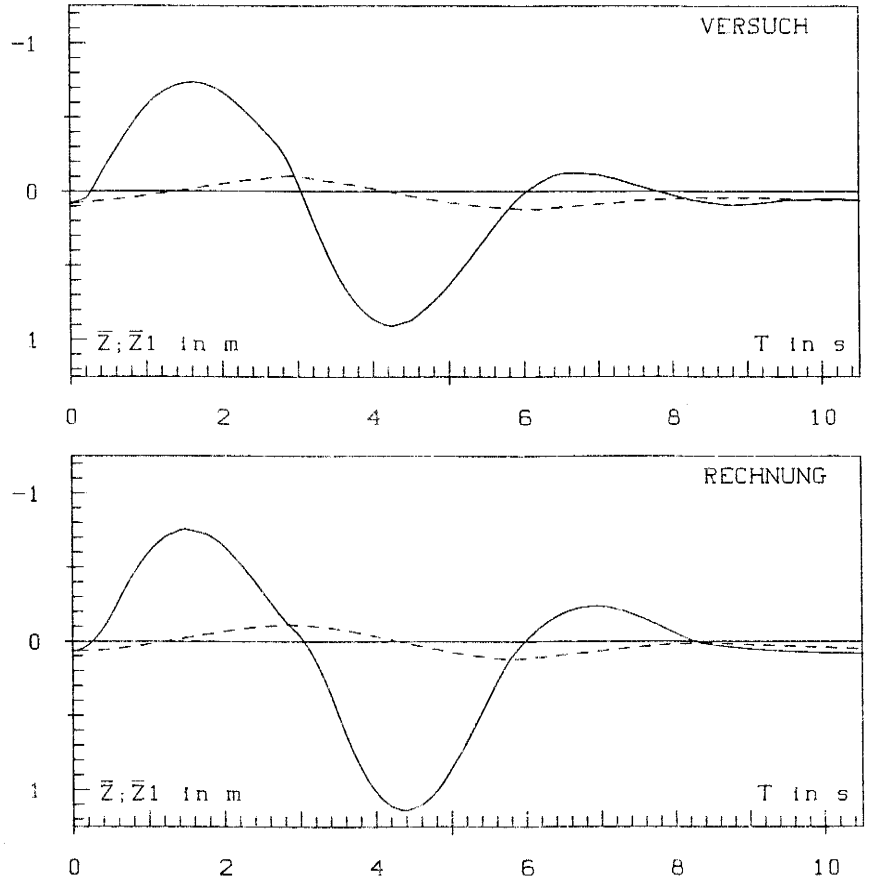


Abb. 6.11: Schwingungsverläufe nach einem Schließen mit anschließendem Öffnen zum Zeitpunkt T_z = 2,9 s

Im weiteren Verlauf sind die Schwingungsverläufe im mathematischen und physikalischen Modell ähnlich.

Die Ergebnisse des mathematischen Modells sind damit für Einfach- wie für Mehrfachschaltfälle als verifiziert zu betrachten.

7. Anwendungsbeispiel

Das Wasserschloß im Oberwasser einer Wasserkraftanlage wird unter Annahme der folgenden Daten für die Triebwasserleitung vorbemessen:

Länge:	$L = 4000$ m		
Durchmesser:	$D = 5{,}25$ m	→	$a = 21{,}65\ m^2$
Rauheit:	$k = 0{,}0025$ m	→	$k/D = 4{,}76 \cdot 10^{-4}$
Örtl. Verluste:	$\Sigma\zeta_i = 3{,}0$		
Durchfluß:	$Q_o = 100\ m^3/s$	→	$v_o = 4{,}62$ m/s
Fallhöhe:	$H = 500$ m		

Die niedrigste Abschwingung im Steigschacht bei plötzlichem Schließen mit anschließendem plötzlichen Öffnen im ungünstigsten Zeitpunkt (LF 4) soll $\bar{Z}_{zul} = 80{,}0$ m nicht überschreiten.

Der Rohrreibungsverlustbeiwert λ ergibt sich mit $Re = 2{,}43 \cdot 10^7$ zu $\lambda = 1{,}653 \cdot 10^{-2}$. Damit wird:

$$\Sigma\zeta = \Sigma\zeta_i + \lambda \cdot \frac{L}{D} = 3{,}0 + 1{,}653 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{4000}{5{,}25} = 15{,}6$$

$$\bar{Z}_o = \Sigma\zeta \cdot \frac{v_o^2}{2g} = 15{,}6 \cdot \frac{4{,}62^2}{2 \cdot 9{,}81} = 16{,}97 \text{ m}$$

Man erhält die dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon = (\Sigma\zeta \cdot v_o)^2 \cdot \frac{1}{4gL} = (15{,}6 \cdot 4{,}62)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 9{,}81 \cdot 4000} = 3{,}309 \cdot 10^{-2}$$

$$h = \frac{H}{\bar{Z}_o} = \frac{500}{16{,}97} = 29{,}5$$

Für die Bestimmung der Stabilitätsgrenze ist ein Sicherheitsabstand einzuhalten. Es wird gewählt:

$$h' = \frac{h}{1{,}5} = \frac{29{,}5}{1{,}5} = 19{,}7$$

Aus der Abbildung 5.24 erhält man damit die Stabilitätsgrenze für $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$ und γ nach der Abbildung 5.11:

$\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}0$; $\varepsilon/\alpha = 0{,}01$

Für die Drosselung ergibt sich aus der Abbildung 5.11 für maximale Dämpfung:

$\lg \gamma = -0{,}8$; $\gamma = 0{,}159$

Die Amplituden in den einzelnen Lastfällen nach den Anlagen III, IV, VII und VIII sind in der Tabelle 7.1 zusammengestellt.

Lastfall	Steigschacht			Hauptschacht		
	Name	$\lvert\bar{z}\rvert$	$\lvert\bar{Z}\rvert$ in m	Name	$\lvert\bar{z}_1\rvert$	$\lvert\bar{Z}_1\rvert$ in m
1	ZM1	5,7	96,7	Z1M1	< 0,25	< 4,2
	ZM3	< 0,25	< 4,2			
2	ZM1	6,5	110,3	Z1M1	< 1,25	< 21,2
	ZM3	< 1,10	< 18,7			
4	ZMIN	8,2	139,2	Z1MIN	< 1,2	< 20,4
5	ZMAX	7,0	118,8	Z1MAX	< 0,5	< 8,5

Tab. 7.1: Amplituden für $\lg \varepsilon/\alpha = -2{,}0$; $\lg \beta/\alpha = -1{,}0$; $\lg \gamma = -0{,}8$

Die niedrigste Spiegellage im Lastfall 4 liegt mit $\bar{Z} = 139{,}2$ m niedriger als die zulässige Spiegellage $\bar{Z}_{zul} = 80{,}0$ m.
Zur Verminderung der Amplituden gibt es drei Möglichkeiten:

- Vergrößerung des Steigschachtquerschnittes, also Vergrößerung des Parameters ε/α,
- Vergrößerung des Hauptschachtquerschnittes, also Verringerung des Parameters β/α,
- Verringerung der Drosselung, also Vergrößerung des Parameters γ.

Mit Hilfe der Abbildung 5.11 wird neu gewählt:

$\lg \varepsilon/\alpha = -1{,}5$; $\varepsilon/\alpha = 3{,}162 \cdot 10^{-2}$
$\lg \beta/\alpha = -0{,}7$; $\beta/\alpha = 0{,}2$
$\lg \gamma = -0{,}65$; $\gamma = 0{,}224$

Damit ergeben sich die Amplituden nach der Tabelle 7.2:

Lastfall	Steigschacht			Hauptschacht		
	Name	$\lvert\bar{z}\rvert$	$\lvert\bar{z}\rvert$ in m	Name	$\lvert\bar{z}_1\rvert$	$\lvert\bar{z}_1\rvert$ in m
1	ZM1	2,75	46,7	Z1M1	0,25	4,2
	ZM3	< 0,25	< 4,2			
2	ZM1	3,7	62,8	Z1M1	< 1,25	< 21,2
	ZM3	< 1,1	< 18,7			
4	ZMIN	4,5	76,4	Z1MIN	< 1,2	< 20,4
5	ZMAX	3,1	52,6	Z1MAX	0,25	4,2

Tab. 7.2: Amplituden für $\lg \varepsilon/\alpha = -1{,}5$; $\lg \beta/\alpha = -0{,}7$; $\lg \gamma = -0{,}65$

Der Betrag der niedrigsten Spiegellage im Steigschacht erfüllt damit die Bedingung $\bar{z}_{zul} = 80{,}0$ m. Das Stabilitätskriterium ergibt sich nach der Anlage IX für diese Parameterkombination zu $h_{min} = 11{,}5 \ll 29{,}5$, ist also ebenfalls eingehalten.
Für die einzelnen Bauteile des Differentialwasserschlosses ergeben sich nach der Vorbemessung folgende Werte:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\varepsilon/\alpha} = \frac{3{,}309 \cdot 10^{-2}}{3{,}162 \cdot 10^{-2}} = 1{,}046$$

Der Querschnitt des Steigschachtes beträgt also:

$$A = \frac{a}{\alpha} = \frac{21{,}65}{1{,}046} = 20{,}69 \text{ m}^2 \quad \rightarrow D_s = 5{,}13 \text{ m}$$

Für den Querschnitt des Hauptschachtes erhält man:

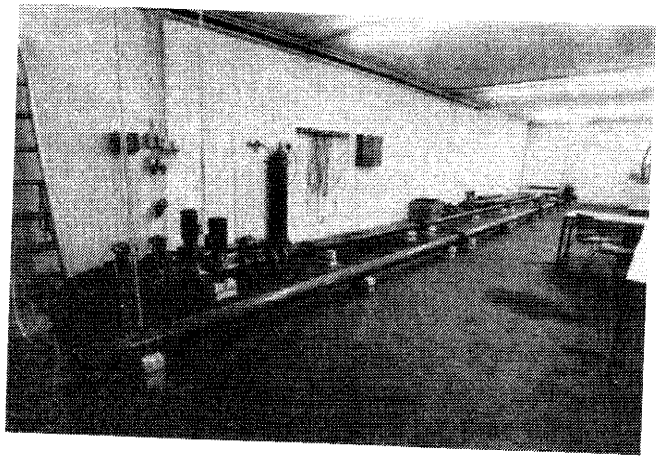
$$A_1 = \frac{A}{\beta/\alpha} = \frac{20{,}69}{0{,}2} = 103{,}5 \text{ m}^2 \rightarrow D_H = 11{,}48 \text{ m}$$

Die Drossel hat den auf den Querschnitt a der Triebwasserleitung bezogenen Verlustbeiwert:

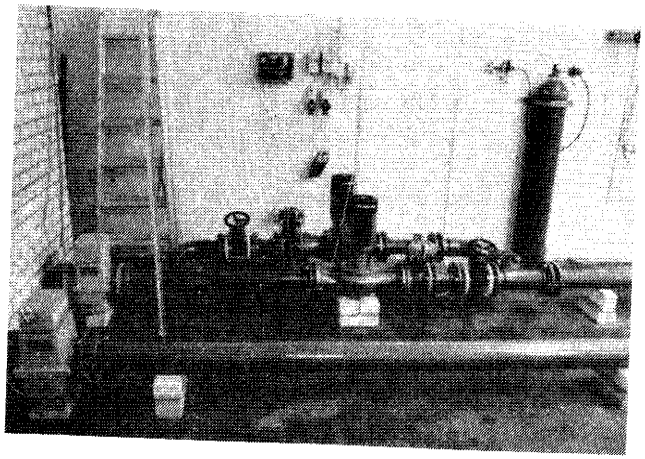
$$\zeta_{Dr} = \frac{\Sigma\zeta}{\gamma^2} = \frac{15{,}6}{0{,}224^2} = 311$$

Anlage I

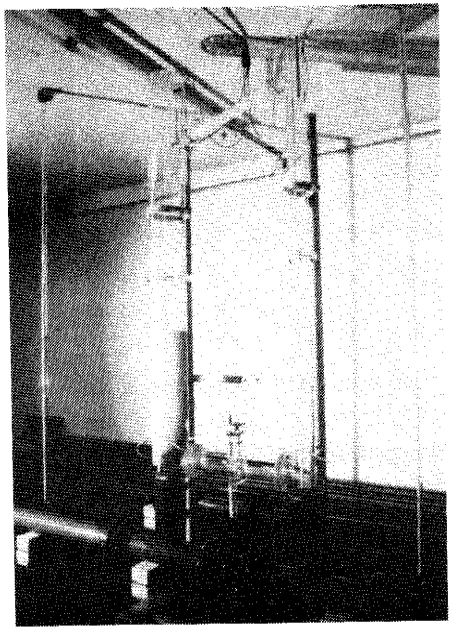
Physikalisches Modell



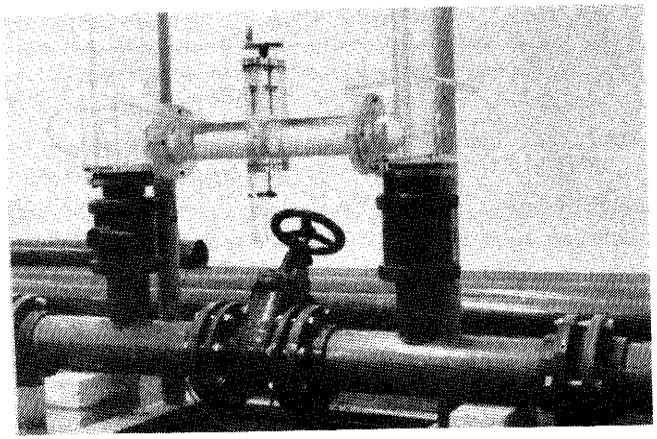
Wasserschloßmodell: Rohrleitungssystem



Wasserschloßmodell: Pumpen, Regelung, Durchflußmessung



Wasserschloßmodell: Haupt- und Steigschacht



Wasserschloßmodell: Drossel

Anlage II

Bestimmung der ungünstigsten Schaltzeitpunkte für die Mehrfachschaltfälle

II. Bestimmung der ungünstigsten Schaltzeitpunkte für die Mehrfachschaltfälle

Die Energie, die der Wasserschloß-Schwingung bei einer Schaltung in den Zustand i zum Zeitpunkt t_z zur Verfügung steht, hat nach Gleichung (3.11) den Betrag

$$E = \frac{1}{2}\cdot a\cdot L\cdot \rho\cdot \left[v(t_z) - v_{o,i}\right]^2 + A\cdot\left[\bar{Z}(t_z) - \bar{Z}_{o,i}\right]\cdot \rho\cdot g\cdot \frac{\left[\bar{Z}(t_z) - \bar{Z}_{o,i}\right]}{2} \qquad \text{(II.1)}$$

$$E = \frac{\rho}{2}\cdot \left\{ a\cdot L\cdot \left[v(t_z) - v_{o,i}\right]^2 + A\cdot g\cdot \left[\bar{Z}(t_z) - \bar{Z}_{o,i}\right]^2 \right\} \qquad \text{(II.1a)}$$

Wird während des Phasenbereiches zwischen dem Schaltzeitpunkt t_z und dem Zeitpunkt der nächsten extremen Spiegellage der Reibungsanteil nicht betrachtet, so wird die Amplitude $\bar{Z}^*$ des Wasserspiegels erreicht, wenn der Durchfluß null ist. Zu diesem Zeitpunkt gilt:

$$E = A\cdot \bar{Z}^*(t_z)\cdot \rho\cdot g\cdot \frac{\bar{Z}^*(t_z)}{2} \qquad \text{(II.2)}$$

$$E = \frac{\rho}{2}\cdot A\cdot g\cdot \left[\bar{Z}^*(t_z)\right]^2 \qquad \text{(II.2a)}$$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\bar{Z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{a\cdot L}{A\cdot g}\cdot \left[v(t_z) - v_{o,i}\right]^2 + \left[\bar{Z}(t_z) - \bar{Z}_{o,i}\right]^2} \qquad \text{(II.3)}$$

Die Amplitude der Wasserschloß-Schwingung hängt also vom Zeitpunkt der zweiten Schaltung ab.
Für den Schaltfall "plötzliches Schließen mit anschließendem plötzlichen Öffnen zum Zeitpunkt t_z" ergibt sich aus der Gleichung (II.3):

$$\bar{Z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{a\cdot L}{A\cdot g}\cdot \left[v(t_z) - v_o\right]^2 + \left[\bar{Z}(t_z) - \bar{Z}_o\right]^2} \qquad \text{(II.4)}$$

oder in dimensionsloser Darstellung:

$$\bar{z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot(q-1)^2 + (\bar{z}-1)^2} = \sqrt{f_1(t_z)} \qquad \text{(II.5)}$$

Zur Bestimmung der Extrema der Amplitude wird die erste Ableitung untersucht:

$$\frac{df_1}{dt_z} = \frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot 2\cdot(q-1)\cdot\frac{dq}{dt_z} + 2\cdot(\bar{z}-1)\cdot\frac{dz}{dt_z} \qquad \text{(II.6)}$$

Die Funktionen q und $\bar{z}$ erfüllen das Differentialgleichungssystem (2.36) bis (2.38), so daß mit $\gamma = 0$ (Schachtwasserschloß) gilt:

$$\frac{dq}{dt_z} = \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|) \qquad \text{(II.7)}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt_z} = q_P - q \qquad \text{(II.8)}$$

Nach dem Schließen ist $q_P = 0$. Es ergibt sich:

$$\frac{df_1}{dt_z} = 2\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot(q-1)\cdot\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|) + 2\cdot(\bar{z}-1)\cdot(-q) \qquad \text{(II.9)}$$

$$= 2\cdot(q + q\cdot|q| - q^2\cdot|q| - \bar{z}) \overset{!}{=} 0 \qquad \text{(II.10)}$$

$$\bar{z} = q + q\cdot|q| - q^2\cdot|q| \qquad \text{(II.11)}$$

Wenn zum Zeitpunkt der zweiten Schaltung diese Gleichung erfüllt ist, erreicht die folgende Amplitude einen Extremwert. Aufschluß über die Art des Extremums gibt die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2f_1}{dt_z^2} = 2\cdot\left[\frac{dq}{dt_z} + 2\cdot|q|\cdot\frac{dq}{dt_z} - 3\cdot q\cdot|q|\cdot\frac{dq}{dt_z} - \frac{d\bar{z}}{dt_z}\right] \overset{!}{<} 0 \qquad \text{(II.12)}$$

$$\varepsilon/\alpha\cdot(\bar{z} - q\cdot|q|)\cdot\{1 + 2\cdot|q| - 3\cdot q\cdot|q|\} + q \overset{!}{<} 0 \qquad \text{(II.13)}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (II.11) erhält man:

$$\varepsilon/\alpha\cdot(q - q^2\cdot|q|)\cdot(1 + 2\cdot|q| - 3\cdot q\cdot|q|) + q \overset{!}{<} 0 \qquad \text{(II.14)}$$

$$\varepsilon/\alpha\cdot(q + 2\cdot q\cdot|q| - 4\cdot q^2\cdot|q| - 2\cdot q^4 + 3\cdot q^5) + q \overset{!}{<} 0 \qquad \text{(II.14a)}$$

Der Wertebereich der Funktion q beträgt nach dem Schließen:

$$-1 \le q \le +1 \qquad \text{(II.15)}$$

Für $q < 0$ ergibt sich:

$$\varepsilon/\alpha\cdot(q - 2\cdot q^2 + 4\cdot q^3 - 2\cdot q^4 + 3\cdot q^5) + q < 0 \qquad \text{(II.16)}$$

Für $q > 0$ ergibt sich:

$$\varepsilon/\alpha\cdot(q + 2\cdot q^2 - 4\cdot q^3 - 2\cdot q^4 + 3\cdot q^5) + q > 0 \qquad \text{(II.17)}$$

Maxima für die Amplituden werden also nur für $q < 0$ erreicht.

Die Bedingung für den ungünstigsten Schaltzeitpunkt lautet damit für den Lastfall 4:

$$\bar{z} = q - q^2 - q^3 \quad \text{für} \quad q < 0 \qquad \text{(II.18)}$$

Für den Schaltfall "plötzliches Öffnen mit anschließendem plötzlichen Schließen zum Zeitpunkt t_z" ergibt sich aus der Gleichung (II.3):

$$\bar{z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{a\cdot L}{A\cdot g}\cdot(v(t_z))^2 + (\bar{z}(t_z))^2} \qquad \text{(II.19)}$$

oder in dimensionsloser Darstellung:

$$\bar{z}^*(t_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot q^2 + \bar{z}^2} = \sqrt{f_2(t_z)} \qquad \text{(II.20)}$$

$$\frac{df_2}{dt_z} = \frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot 2\cdot q\cdot\frac{dq}{dt_z} + 2\cdot\bar{z}\cdot\frac{d\bar{z}}{dt_z} \qquad \text{(II.21)}$$

Nach dem Öffnen ist $q_p = 1$ und

$$0 \leq q \leq 2 \qquad \text{(II.22)}$$

so daß man aus den Gleichungen (II.7) und (II.8) erhält:

$$\frac{dq}{dt_z} = \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q^2) \qquad \text{(II.23)}$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt_z} = 1 - q \qquad \text{(II.24)}$$

Damit gilt:

$$\frac{df_2}{dt_z} = 2\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot q\cdot\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q^2) + 2\cdot\bar{z}\cdot(1 - q) \qquad \text{(II.25)}$$

$$= 2\cdot(\bar{z} - q^3) \overset{!}{=} 0 \qquad \text{(II.26)}$$

$$\bar{z} = q^3 \qquad \text{(II.27)}$$

Wenn zum Zeitpunkt der zweiten Schaltung diese Gleichung erfüllt ist, erreicht die folgende Amplitude einen Extremwert. Aufschluß über die Art des Extremums gibt wieder die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2f_2}{dt_z^2} = 2\cdot\left[\frac{d\bar{z}}{dt_z} - 3\cdot q^2\cdot\frac{dq}{dt_z}\right] \overset{!}{\lessgtr} 0 \qquad \text{(II.28)}$$

$$1 - q - 3\cdot q^2\cdot\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot(\bar{z} - q^2) \overset{!}{\lessgtr} 0 \qquad \text{(II.29)}$$

Einsetzen von Gleichung (II.27) ergibt:

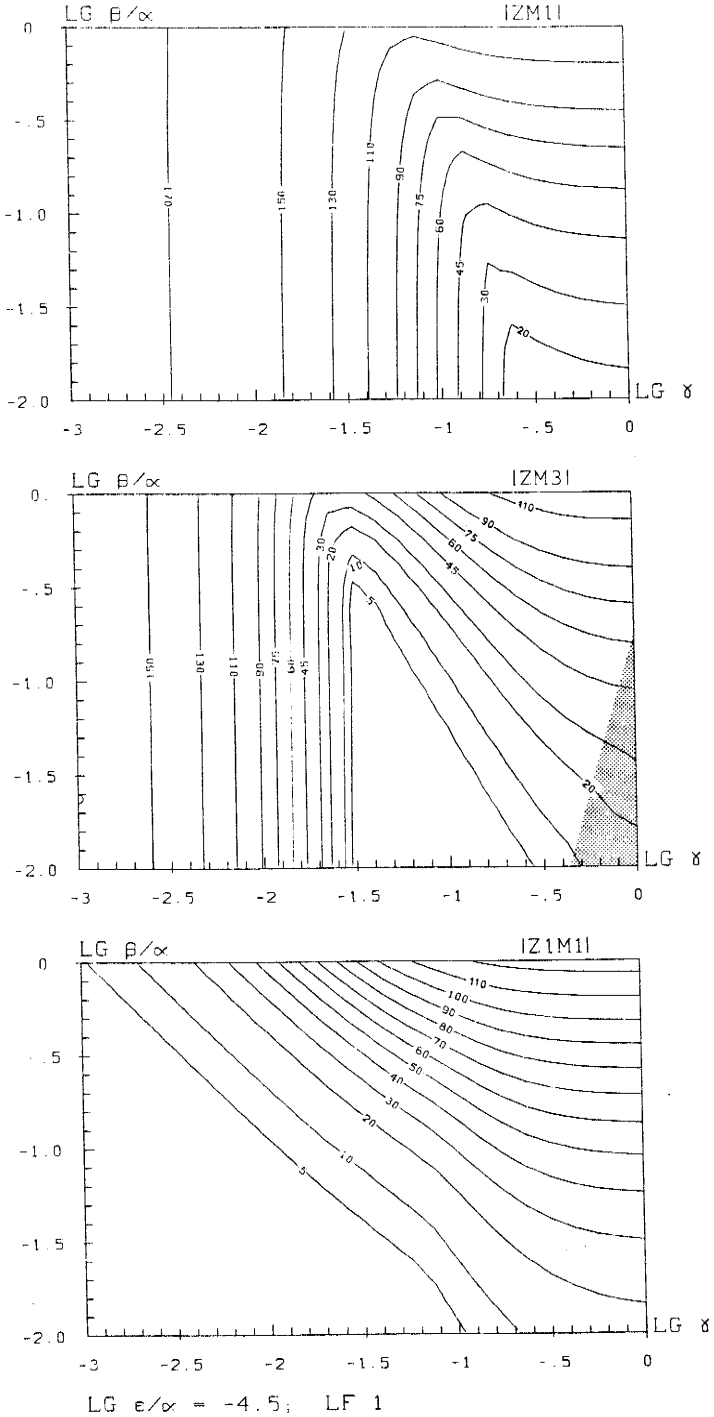
$$(1 - q)\cdot(1 + 3\cdot\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot q^4) \overset{!}{\lessgtr} 0 \qquad \text{(II.30)}$$

Der zweite Term ist stets größer als null. Die Gleichung (II.30) ist daher nur für $q > 1$ erfüllt.
Die Bedingung für den ungünstigsten Schaltzeitpunkt lautet damit für den Lastfall 5:

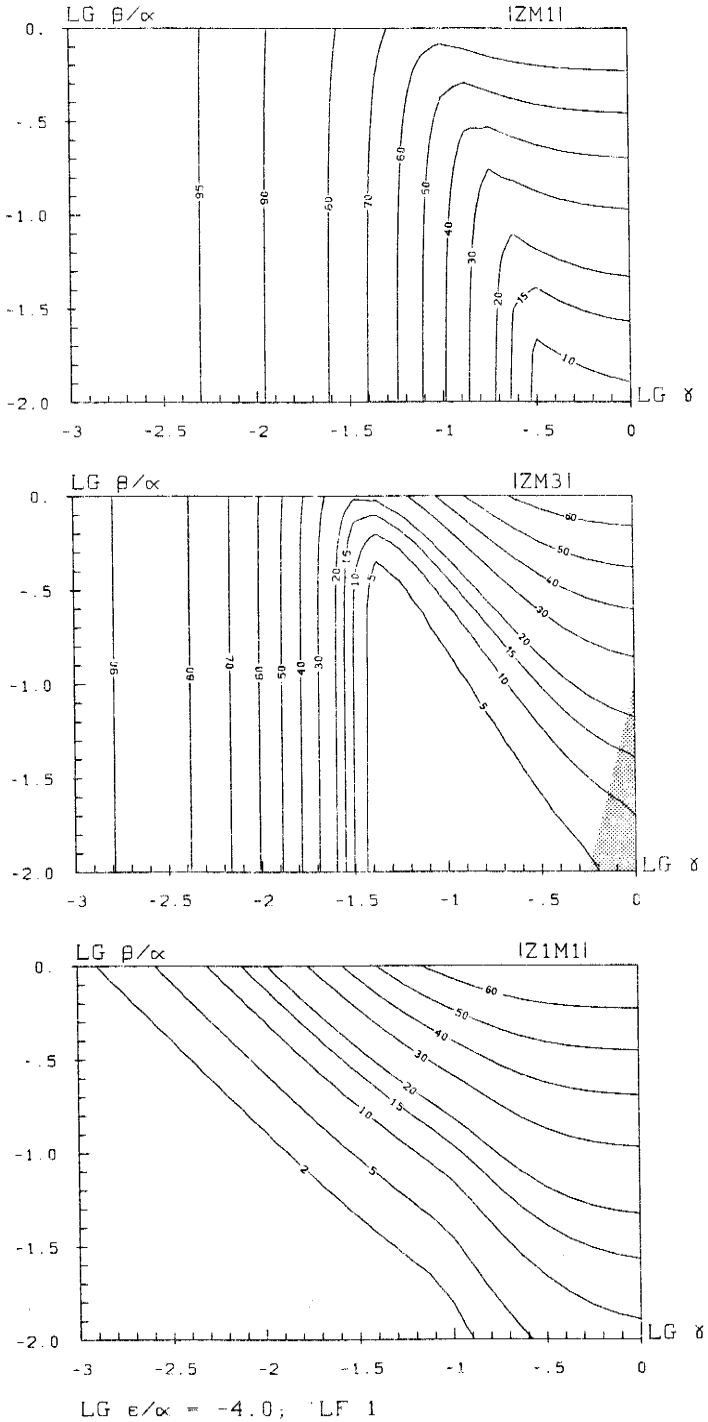
$$\bar{z} = q^3 \quad \text{für} \quad q > 1 \qquad \text{(II.31)}$$

Anlage III

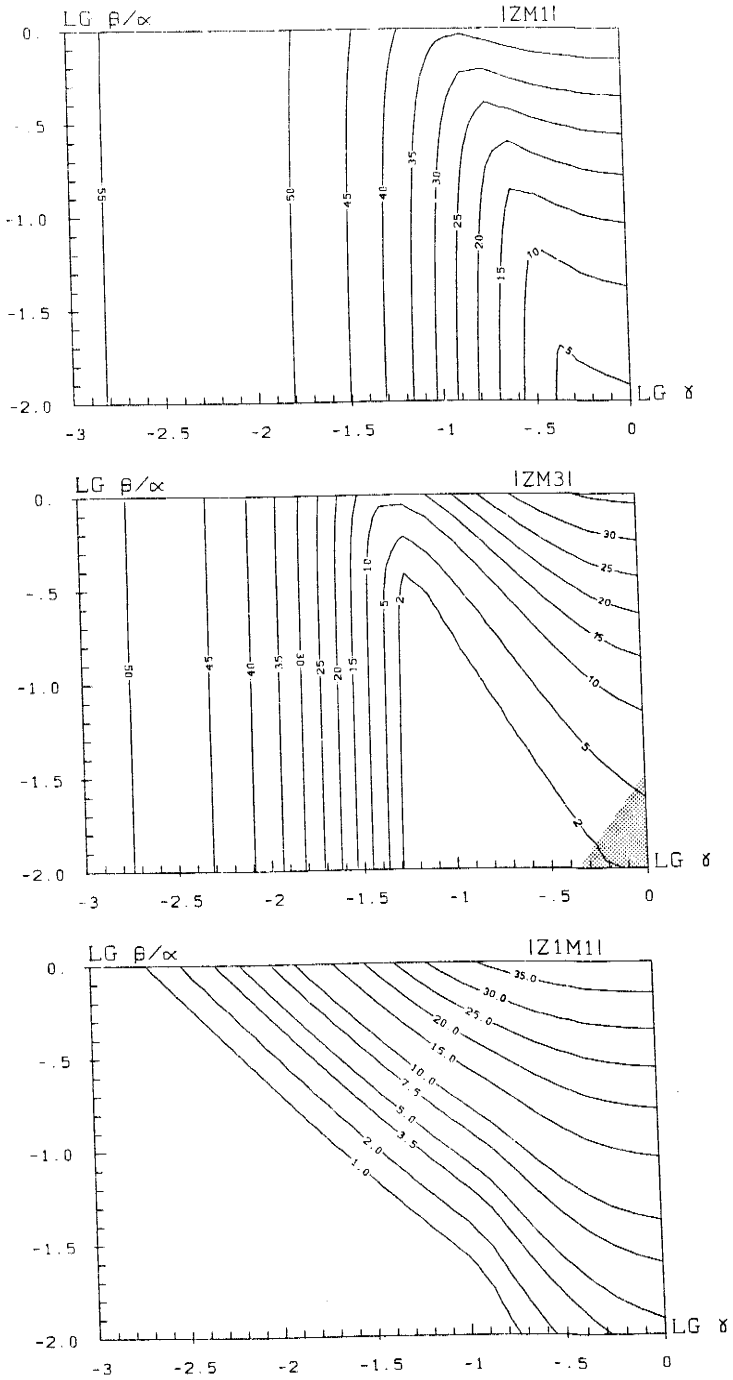
Amplituden im Lastfall 1



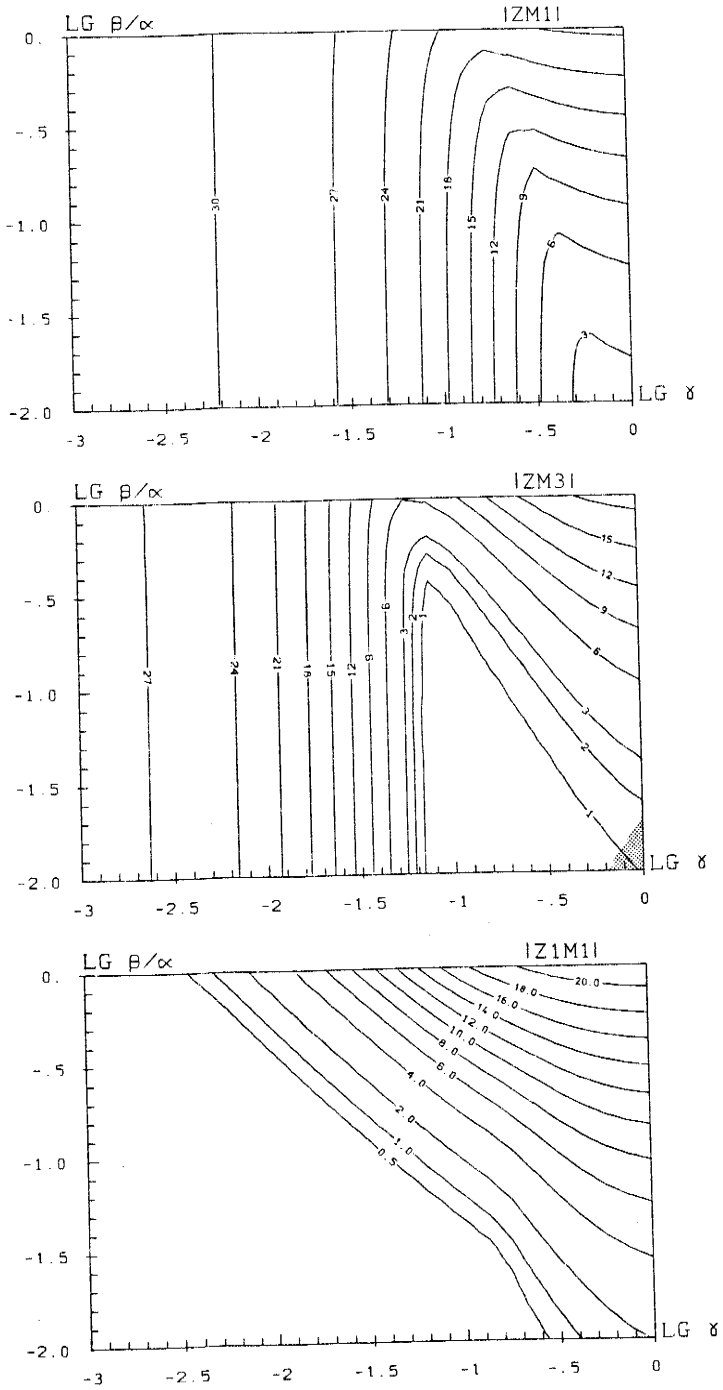
LG ε/α = -4.5; LF 1



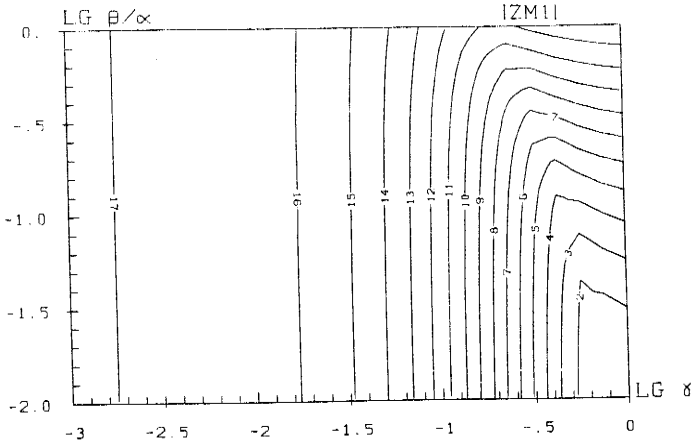
LG ε/α = -4.0; LF 1

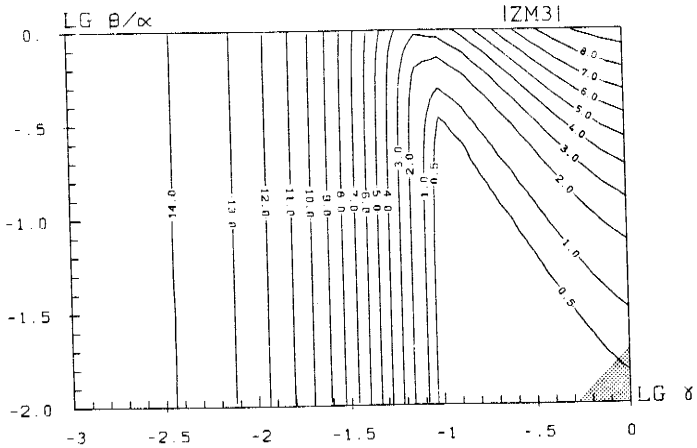


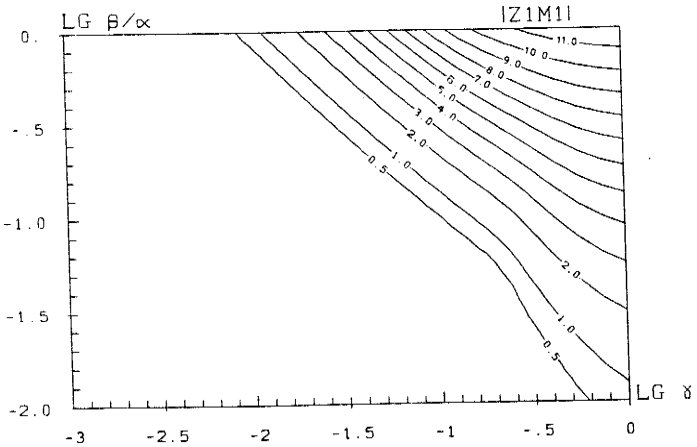
LG ε/α = -3.5; LF 1



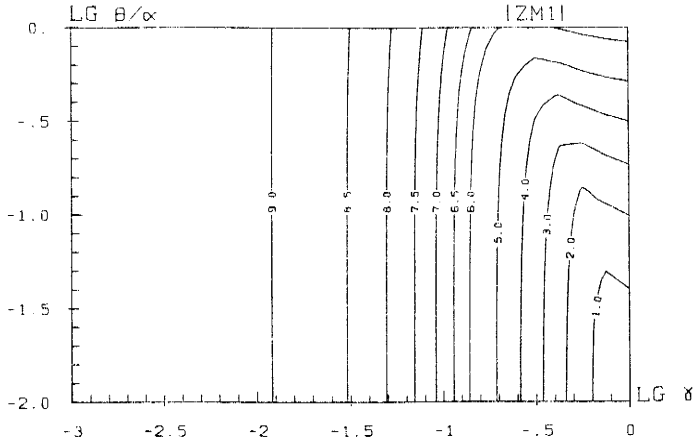
LG ε/α = -3.0; LF 1

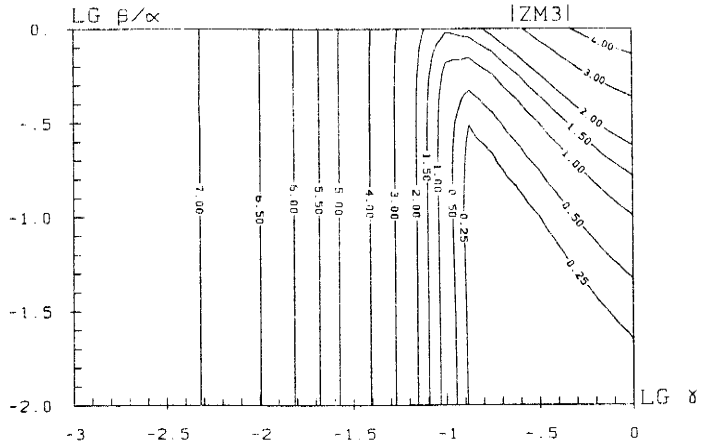


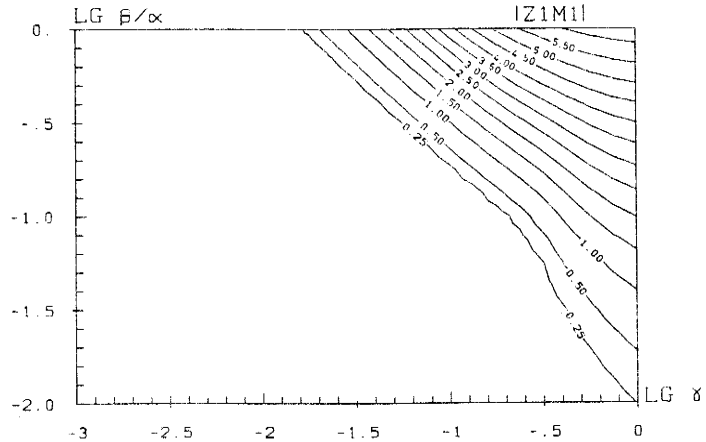




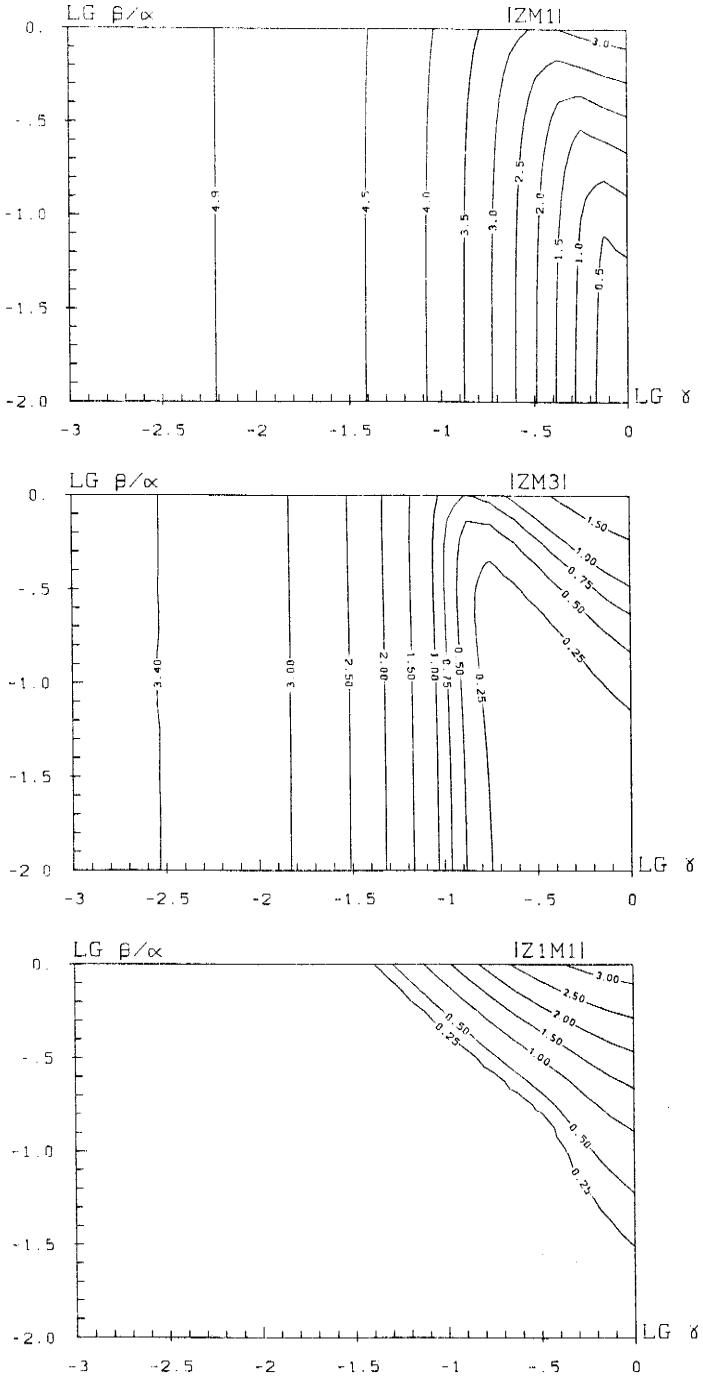
LG ε/α = -2.5; LF 1



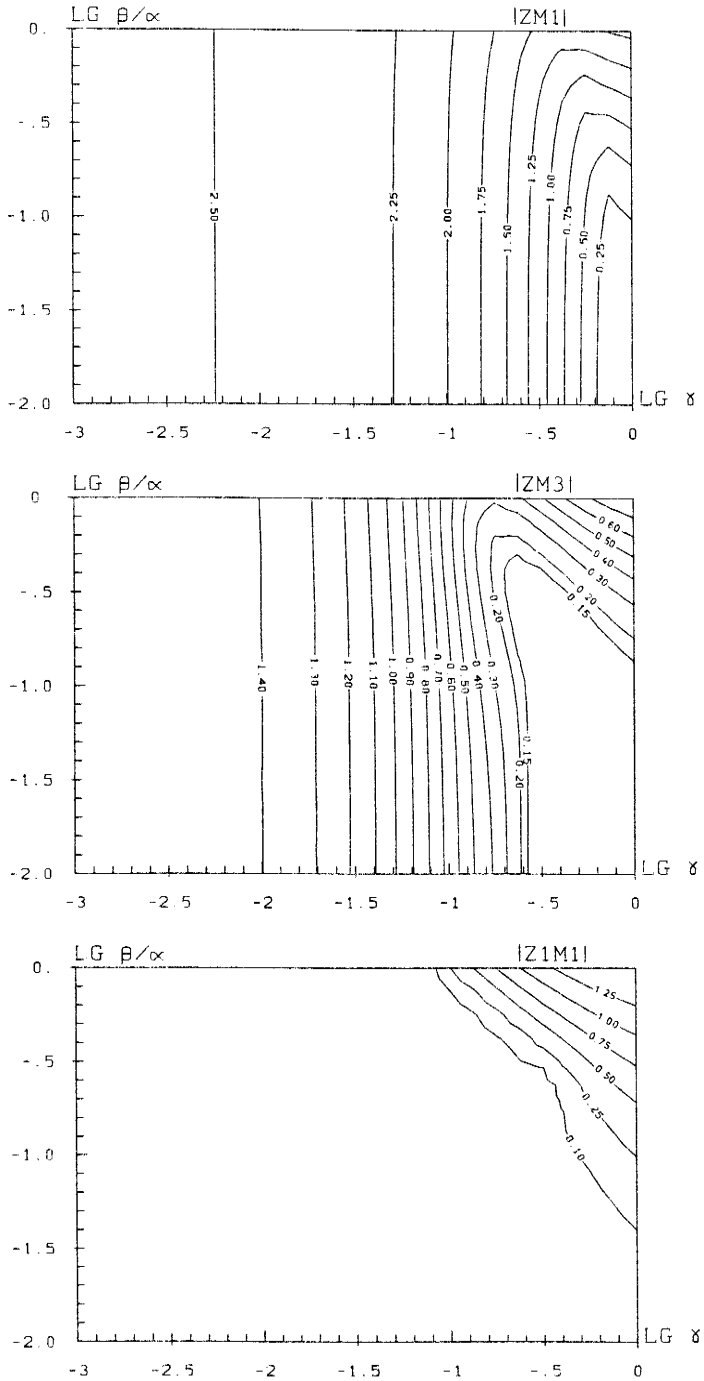




LG ε/α = -2.0; LF 1



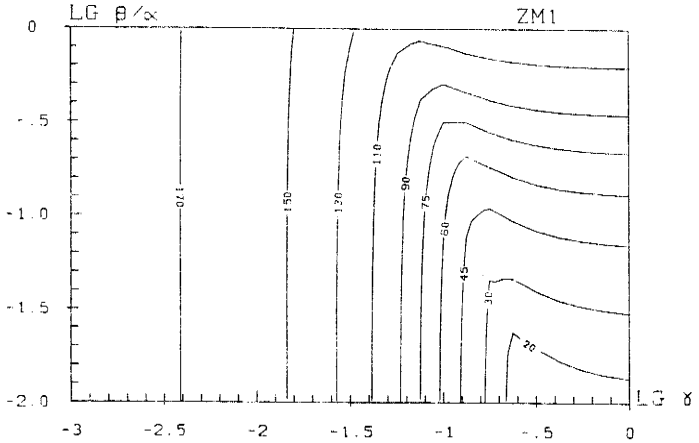
LG ε/α = -1.5; LF 1

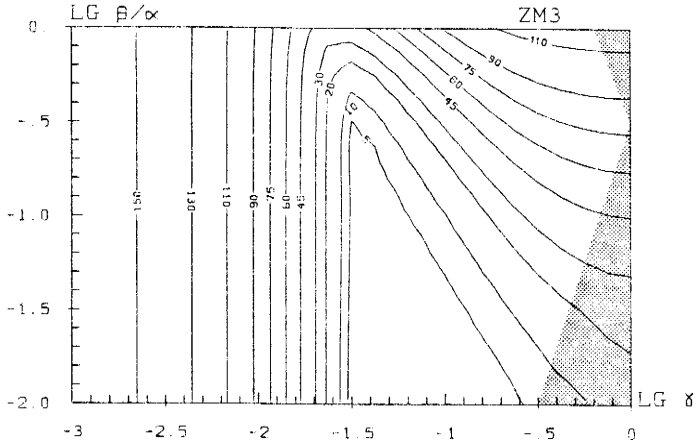


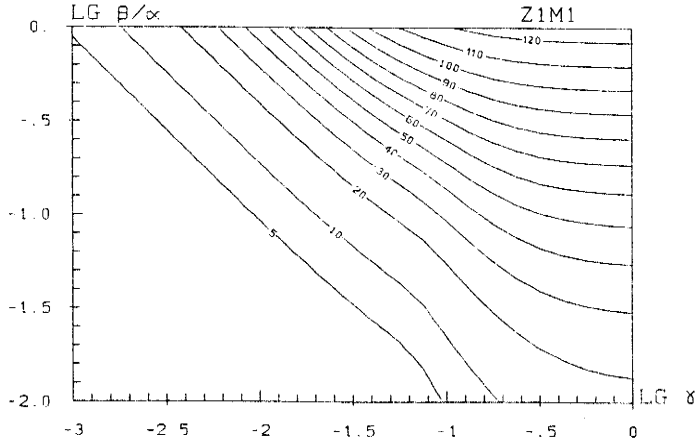
LG ε/α = -1.0; LF 1

Anlage IV

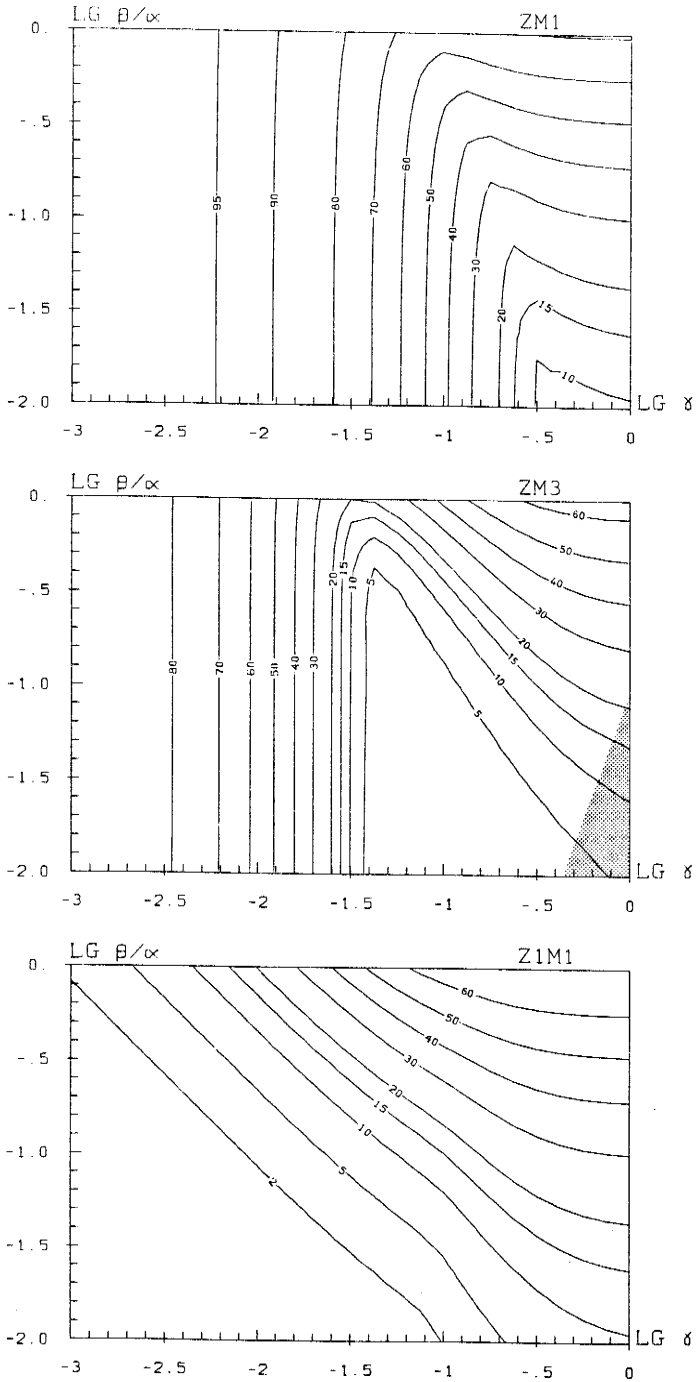
Amplituden im Lastfall 2



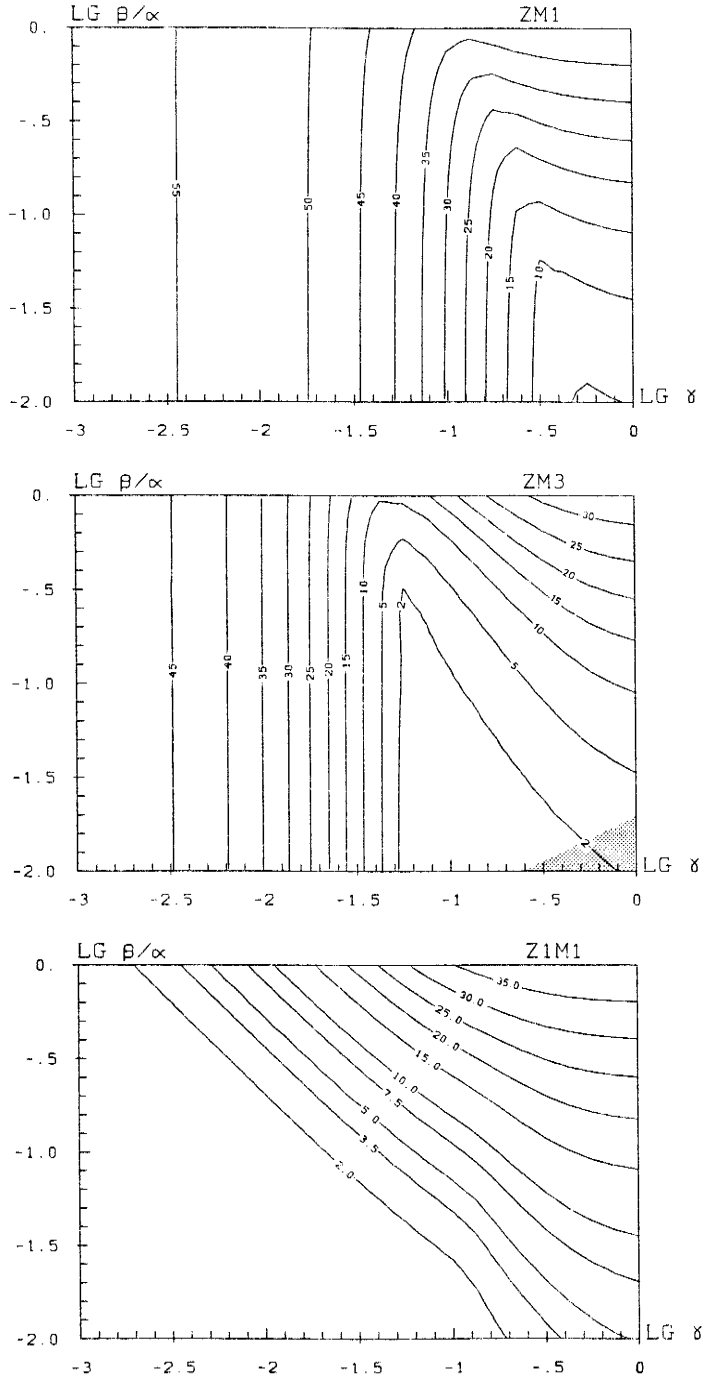




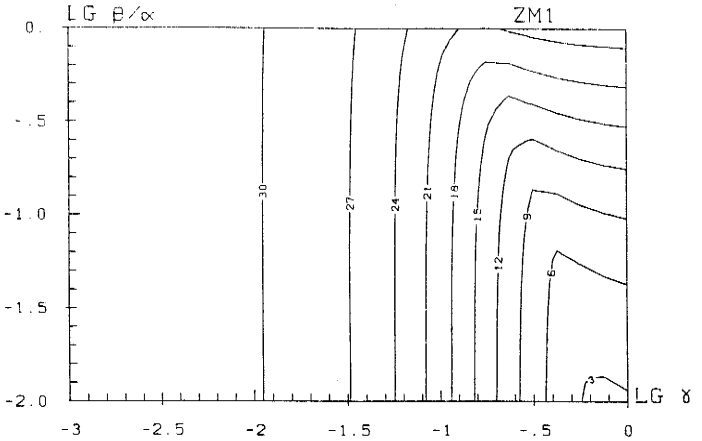
LG ε/α = -4.5; LF 2

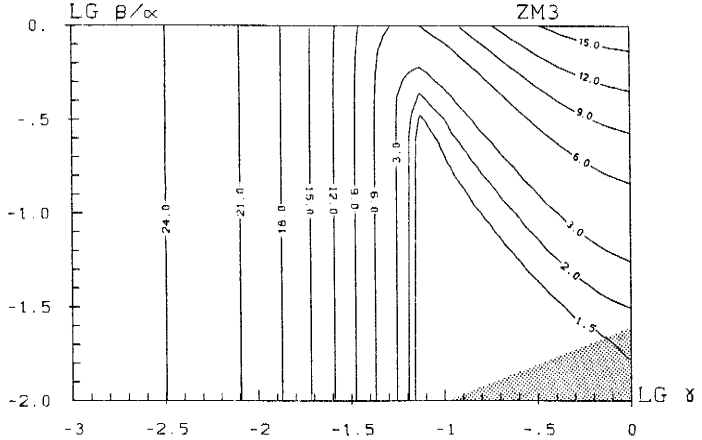


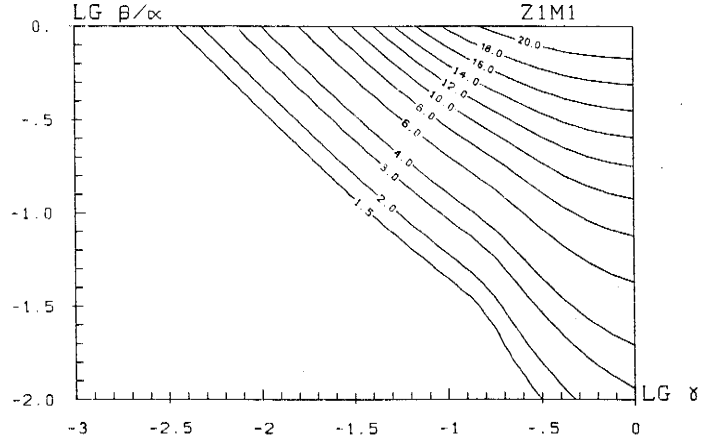
LG ε/α = -4.0; LF 2



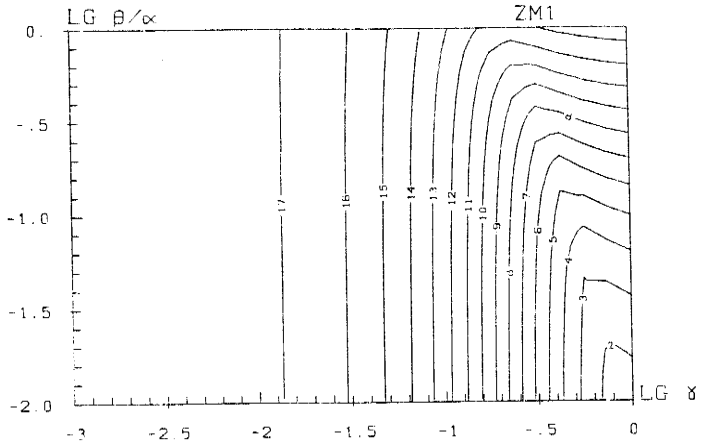
LG ε/α = -3.5; LF 2

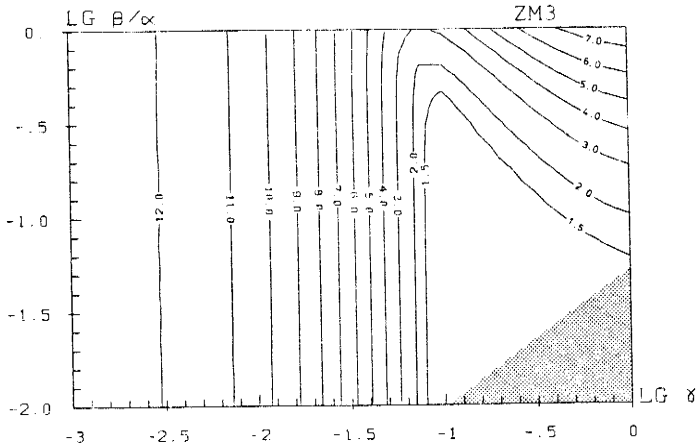


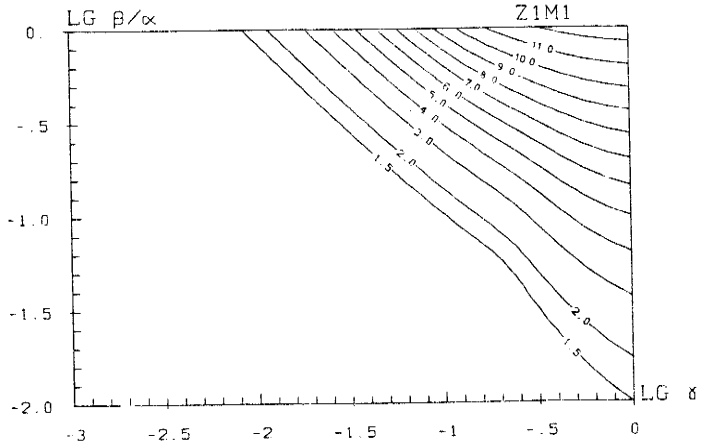




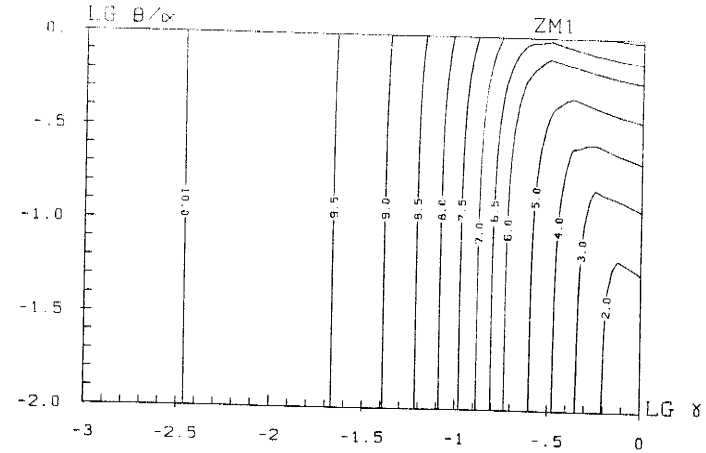
LG ε/α = -3.0; LF 2

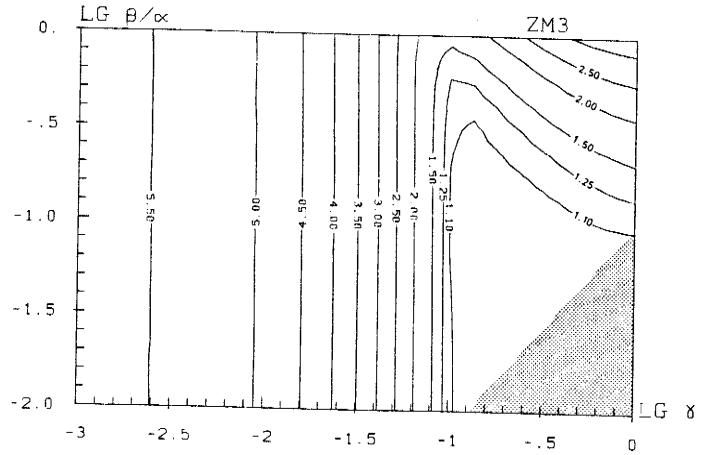


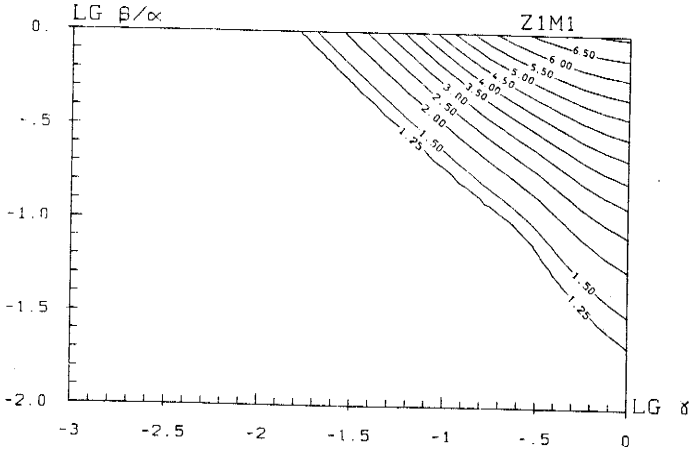




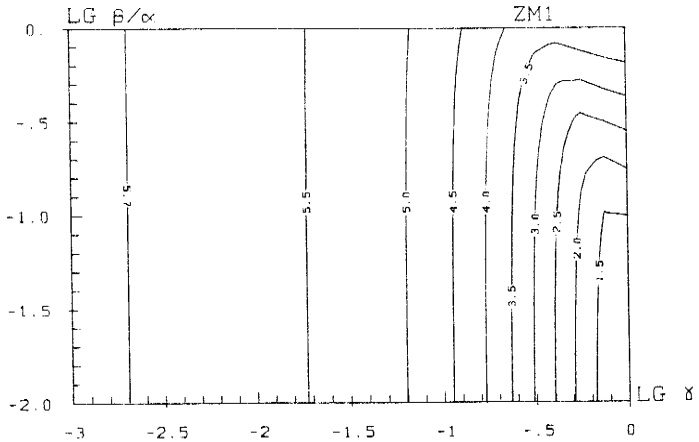
LG ε/α = -2.5; LF 2

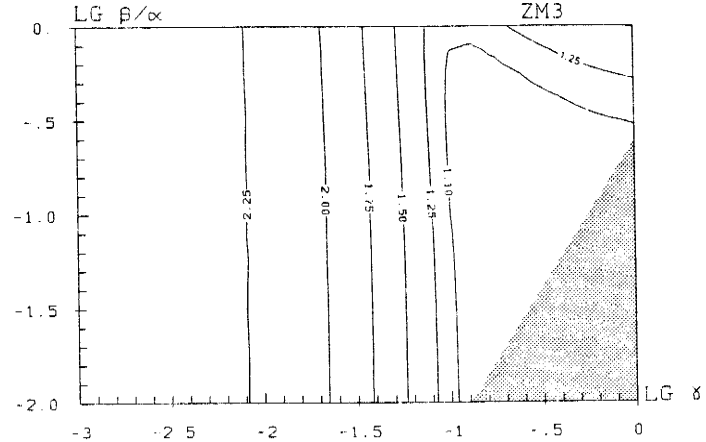


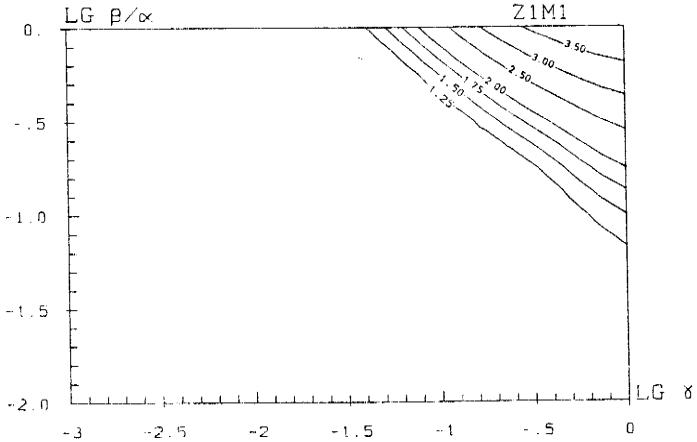




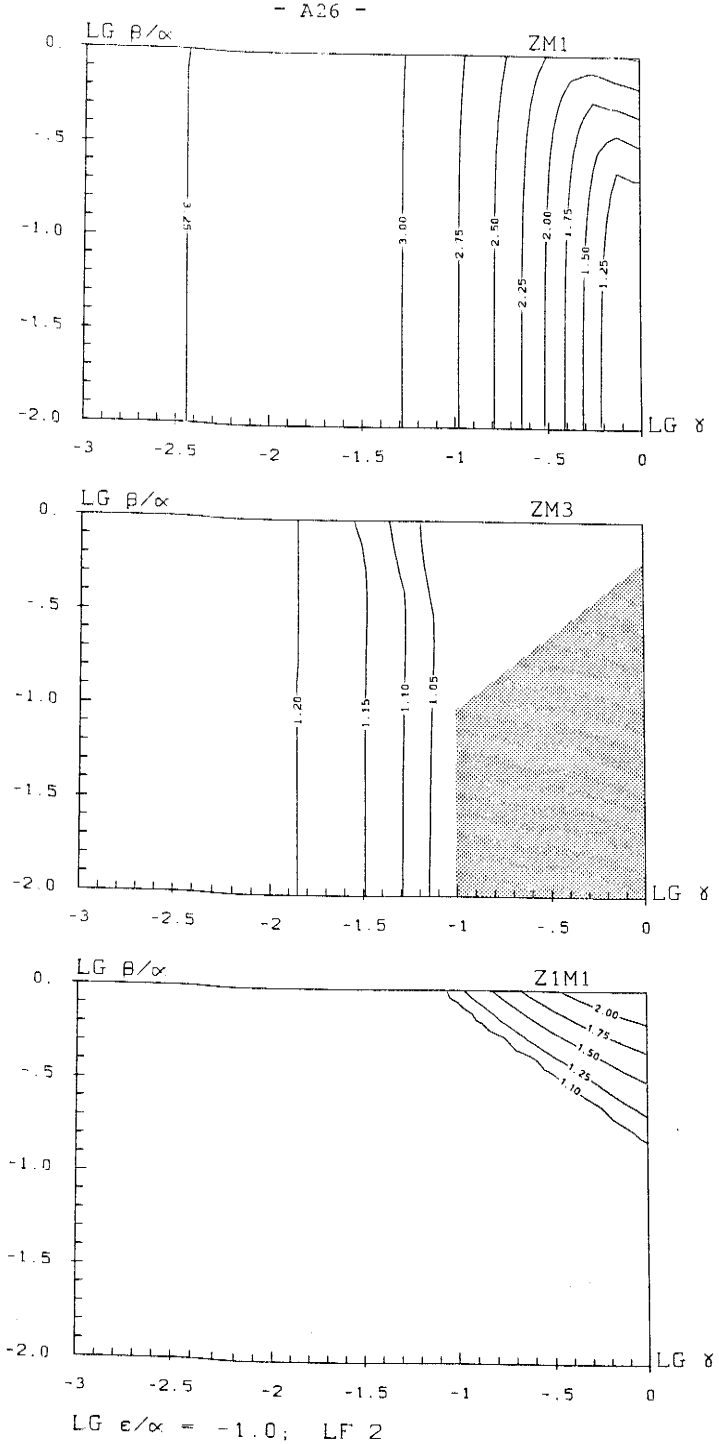
LG ε/α = -2.0; LF 2







LG ε/α = -1.5; LF 2



LG ε/α = -1.0; LF 2

Anlage V

Bestimmung des ungünstigsten Schaltzeitpunktes

für den Lastfall 4

$\bar{z}$

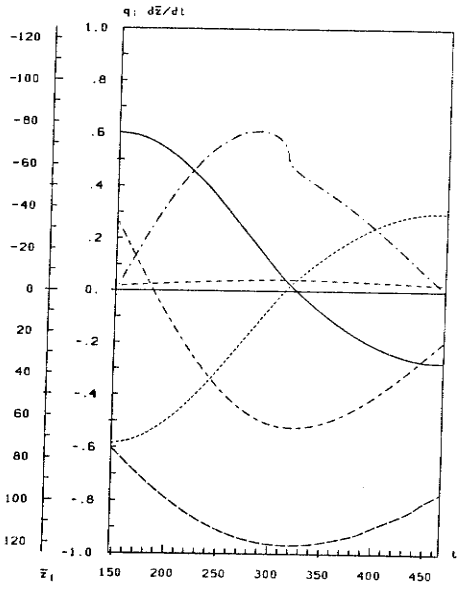
$\bar{z}_1$

$\bar{z}_1 - \bar{z}$

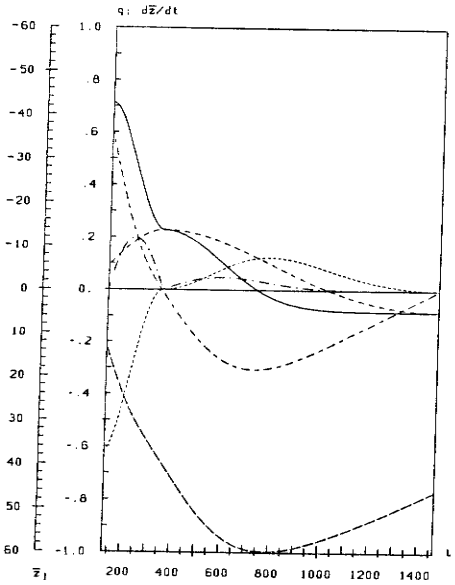
q

$d\bar{z}/dt$

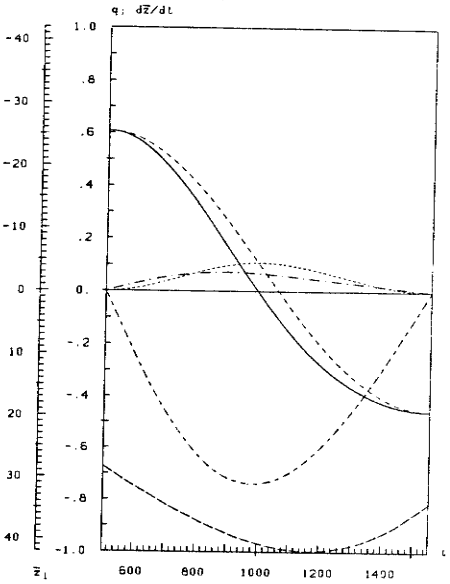
ZMIN



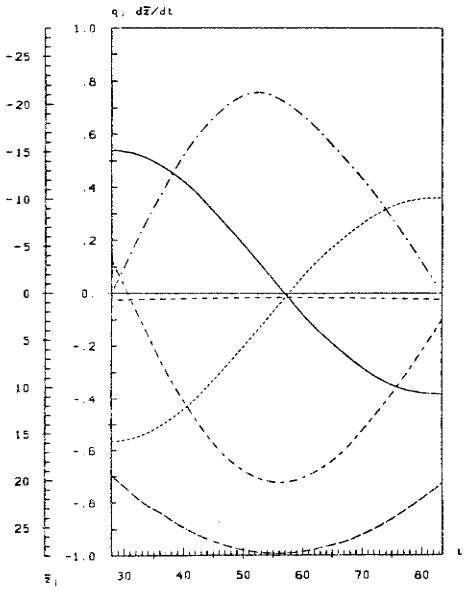
LG ε/α = -4.0; LG β/α = -1.0; LG γ = -1.5



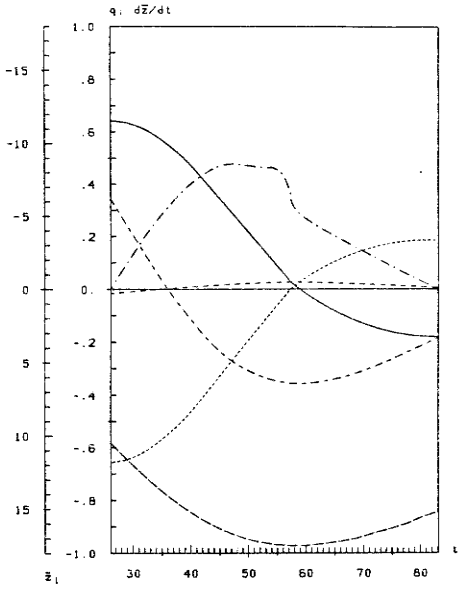
LG ε/α = -4.0; LG β/α = -1.0; LG γ = -1.0



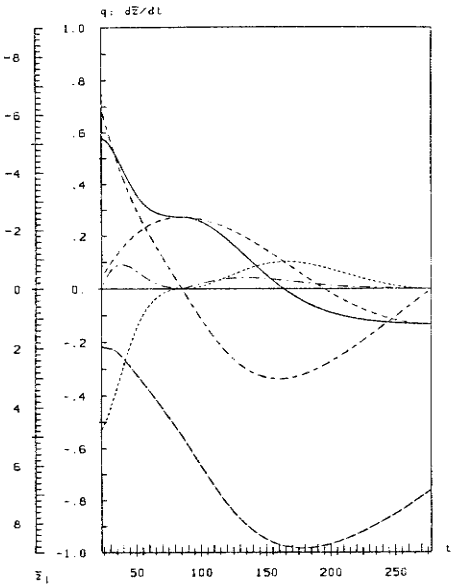
LG ε/α = -4.0; LG β/α = -1.0; LG γ = -0.5



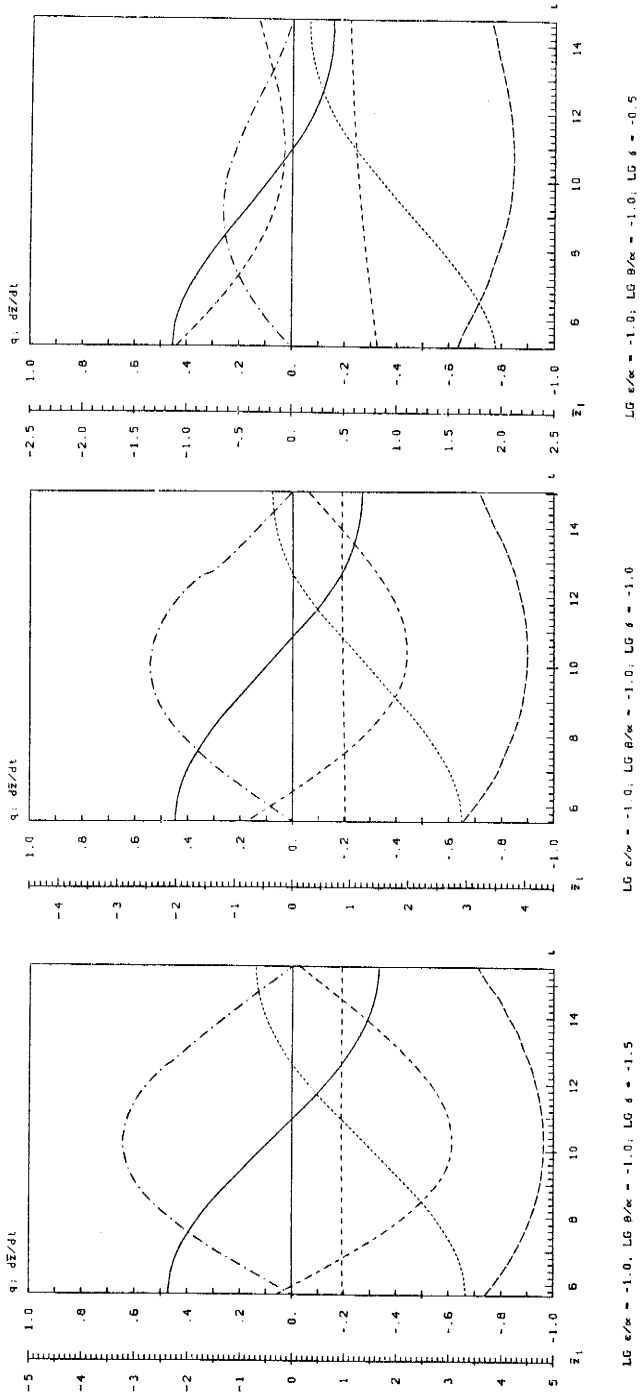
LG ε/α = -2.5; LG β/α = -1.0; LG γ = -1.5



LG ε/α = -2.5; LG β/α = -1.0; LG γ = -1.0



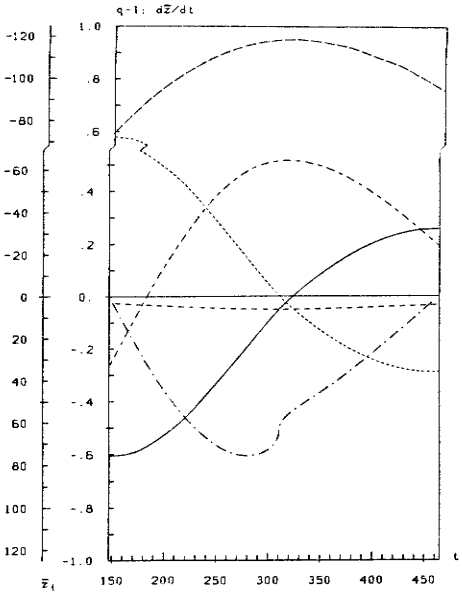
LG ε/α = -2.5; LG β/α = -1.0; LG γ = -0.5



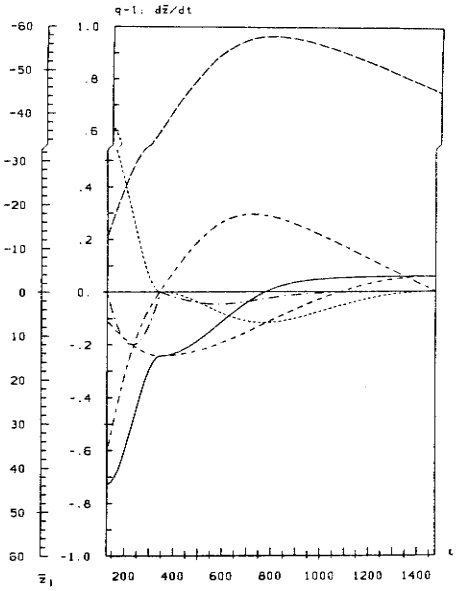
Anlage VI

Bestimmung des ungünstigsten Schaltzeitpunktes für den Lastfall 5

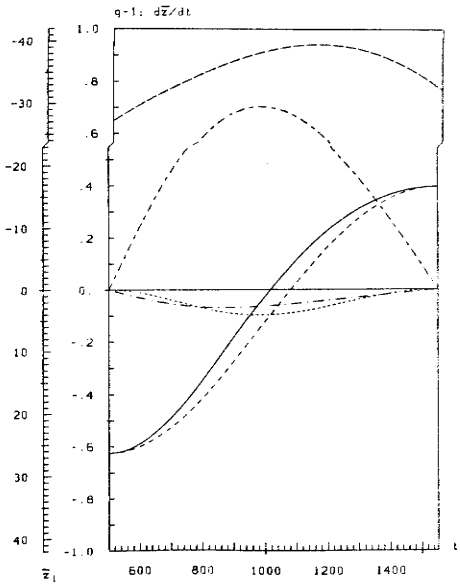
- $\bar{z}$
- $\bar{z}_1$
- $\bar{z}_1 - \bar{z}$
- $q - 1$
- $d\bar{z}/dt$
- ZMAX



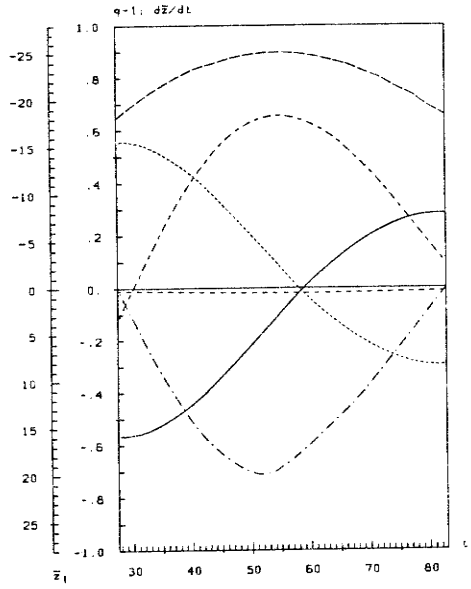
LG ε/α = -4.0; LG β/α = -1.0; LG δ = -1.5



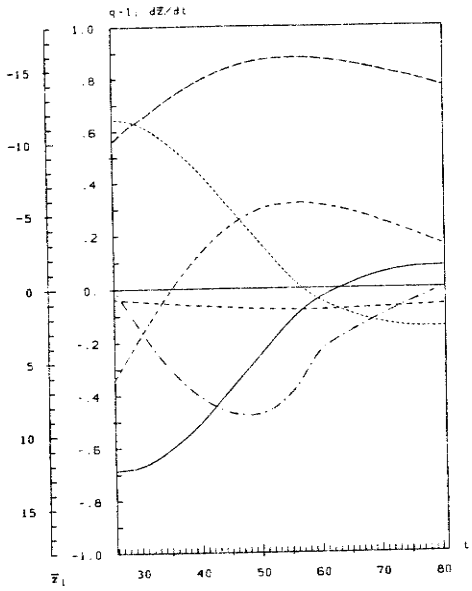
LG ε/α = -4.0; LG β/α = -1.0; LG δ = -1.0



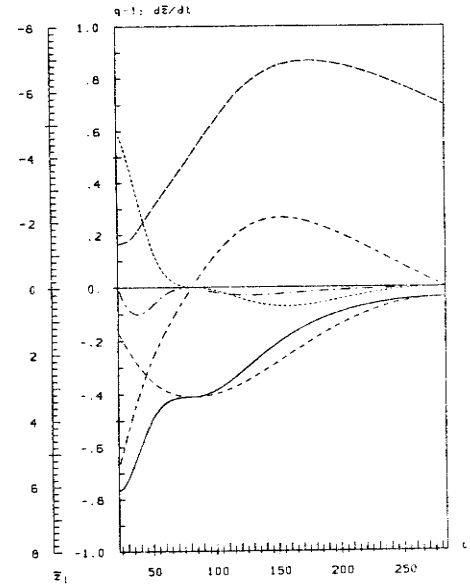
LG ε/α = -4.0; LG β/α = -1.0; LG δ = -0.5



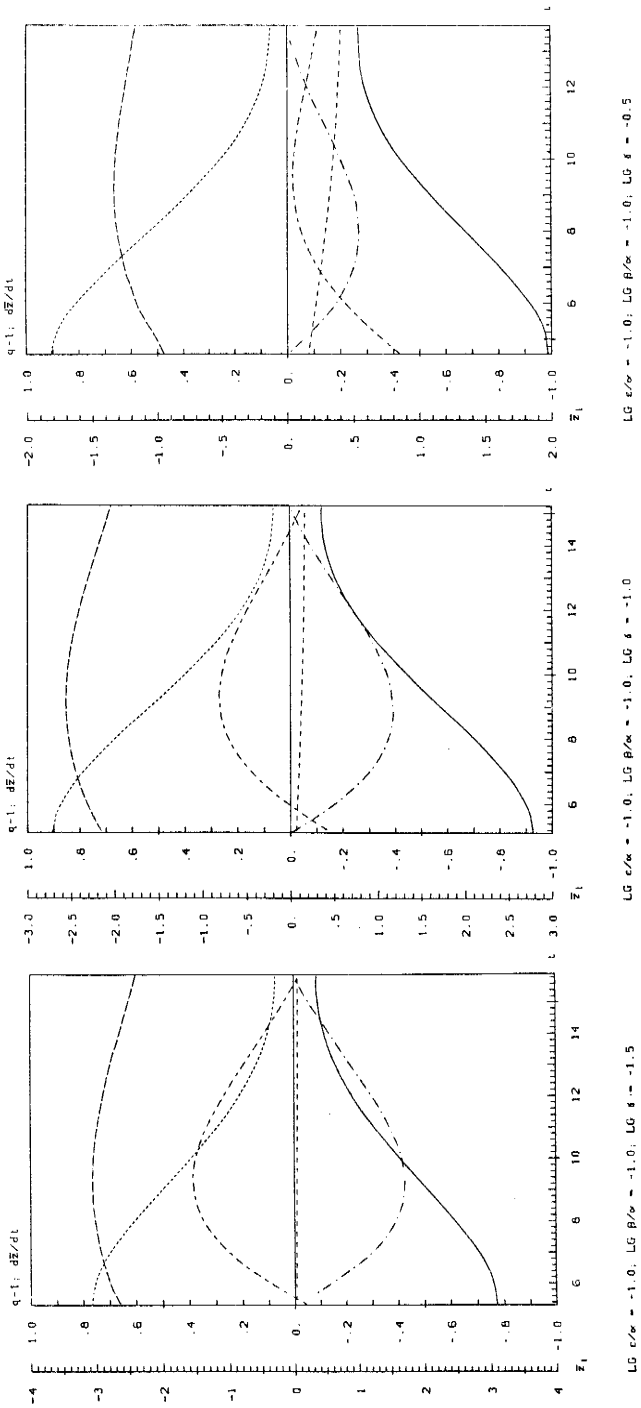
LG ε/α = -2.5; LG β/α = -1.0; LG δ = -1.5



LG ε/α = -2.5; LG β/α = -1.0; LG δ = -1.0

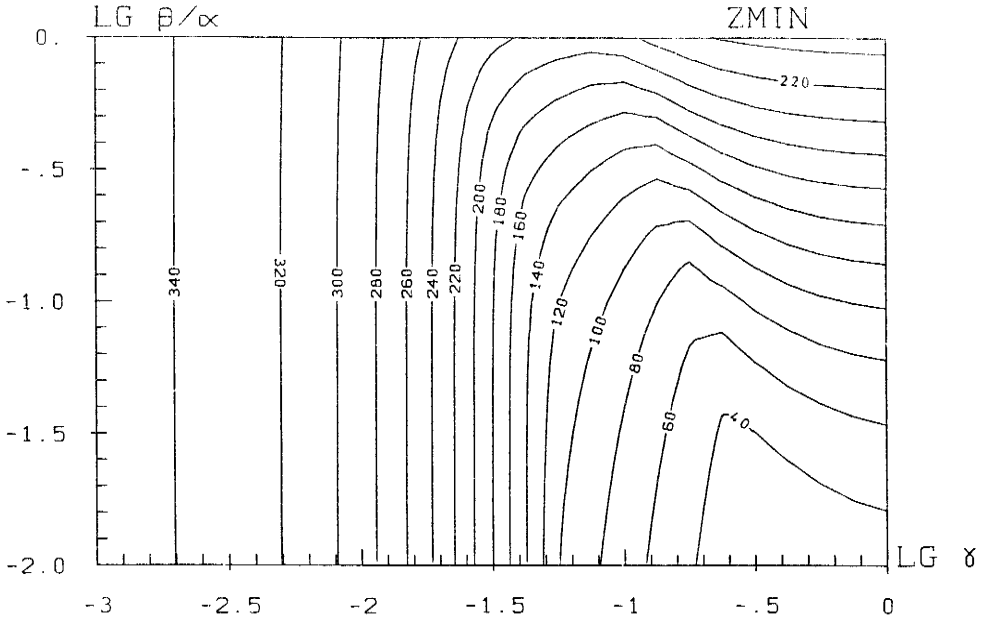


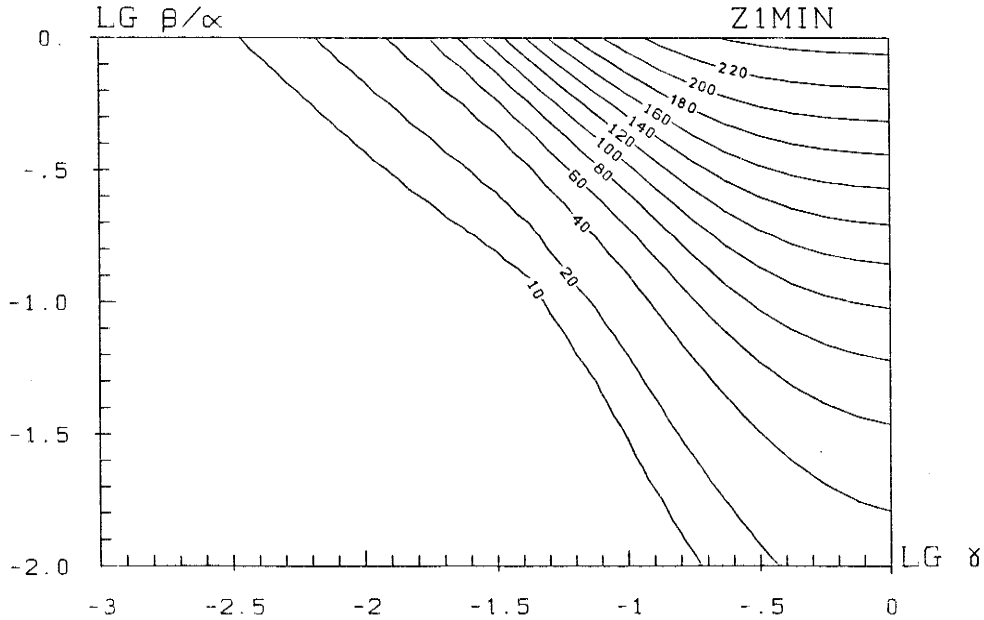
LG ε/α = -2.5; LG β/α = -1.0; LG δ = -0.5



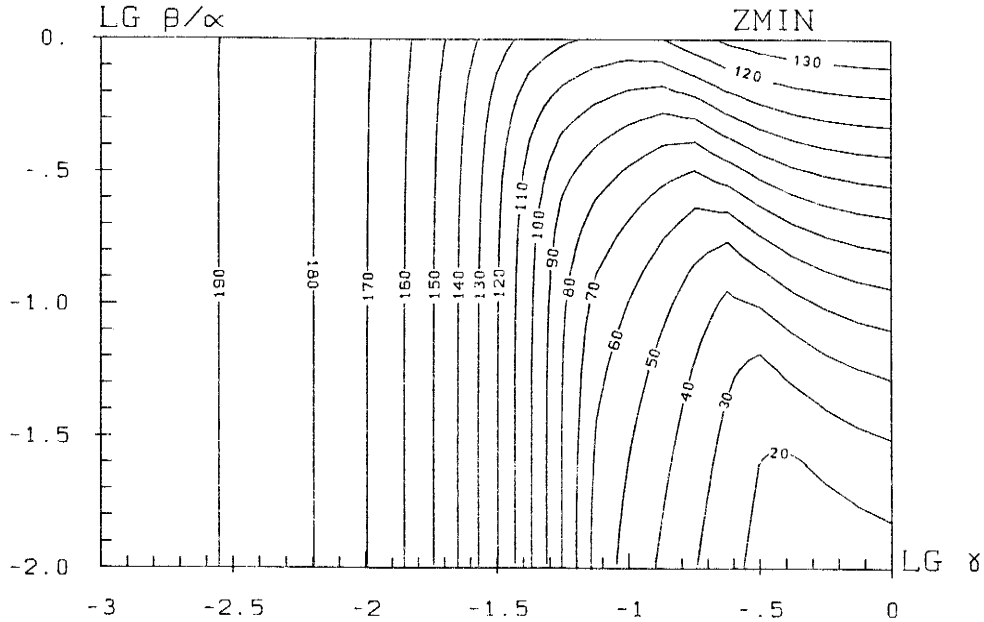
Anlage VII

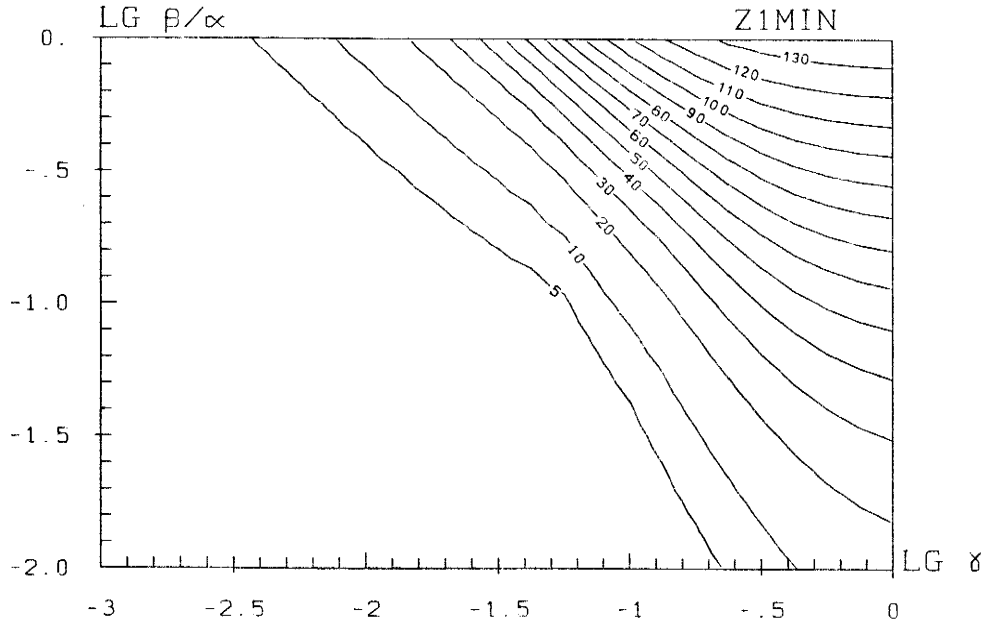
Amplituden im Lastfall 4



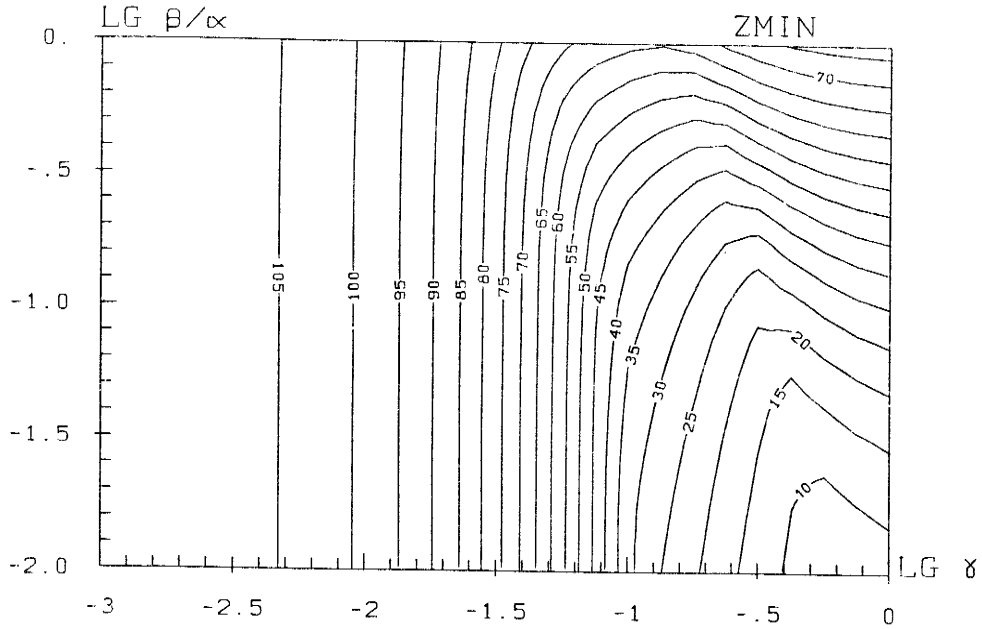


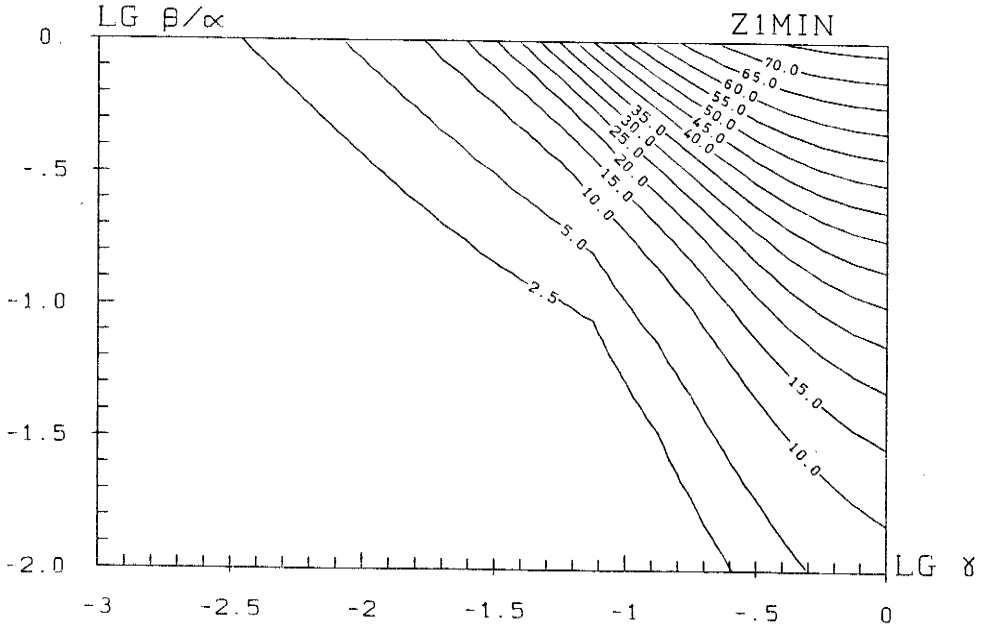
LG ε/α = -4.5; LF 4



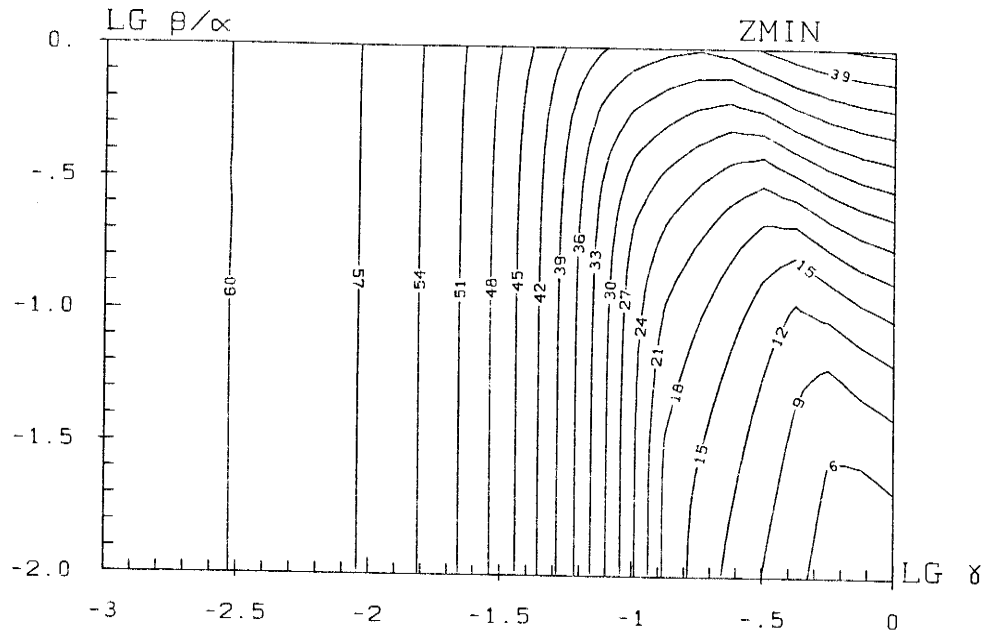


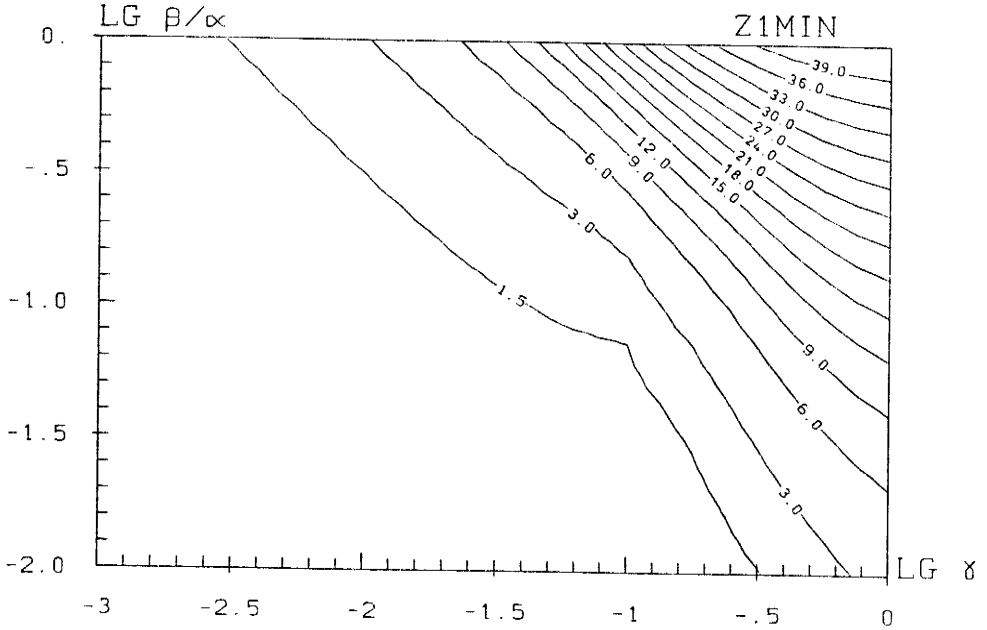
LG ε/α = -4.0; LF 4



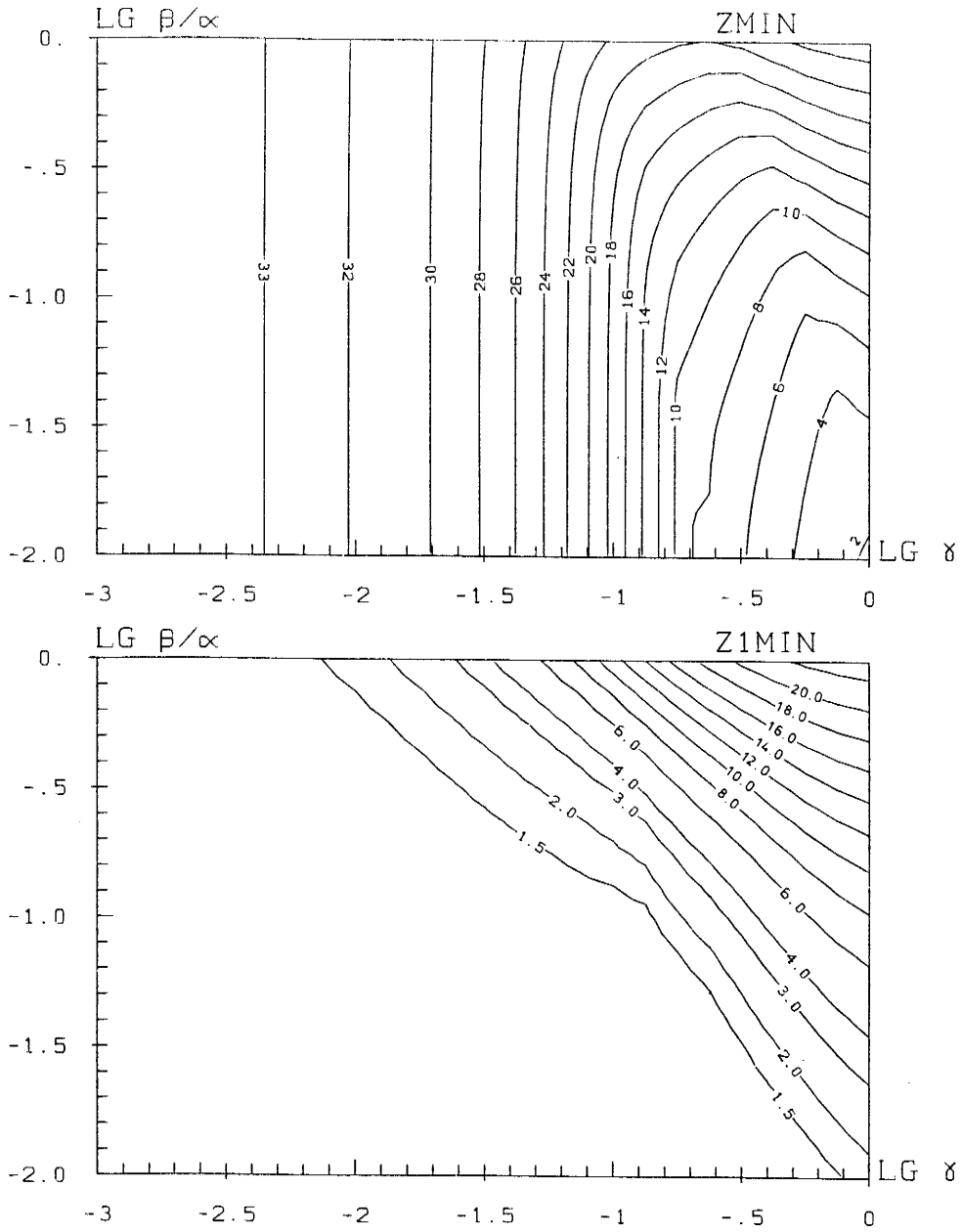


LG ε/α = -3.5; LF 4

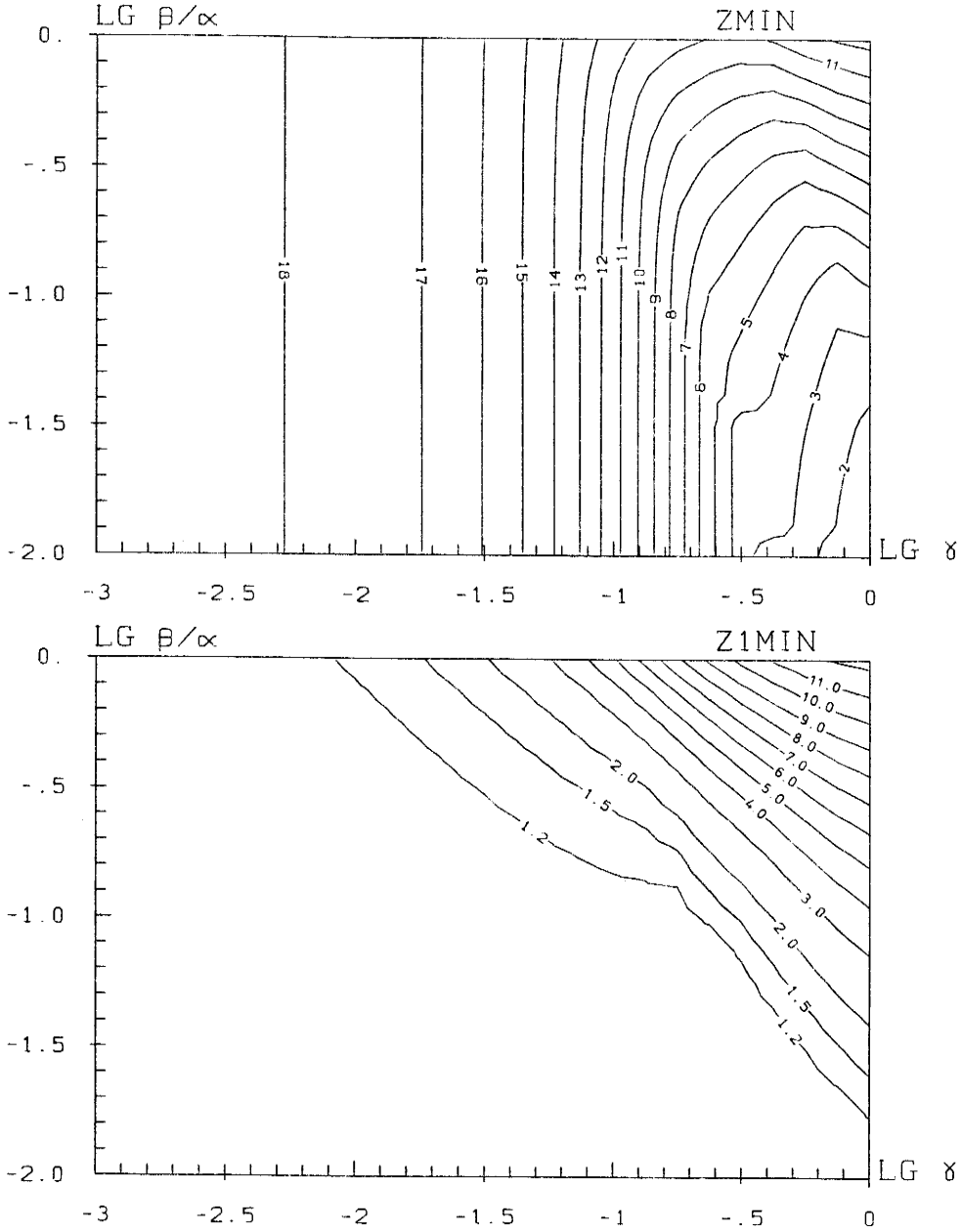




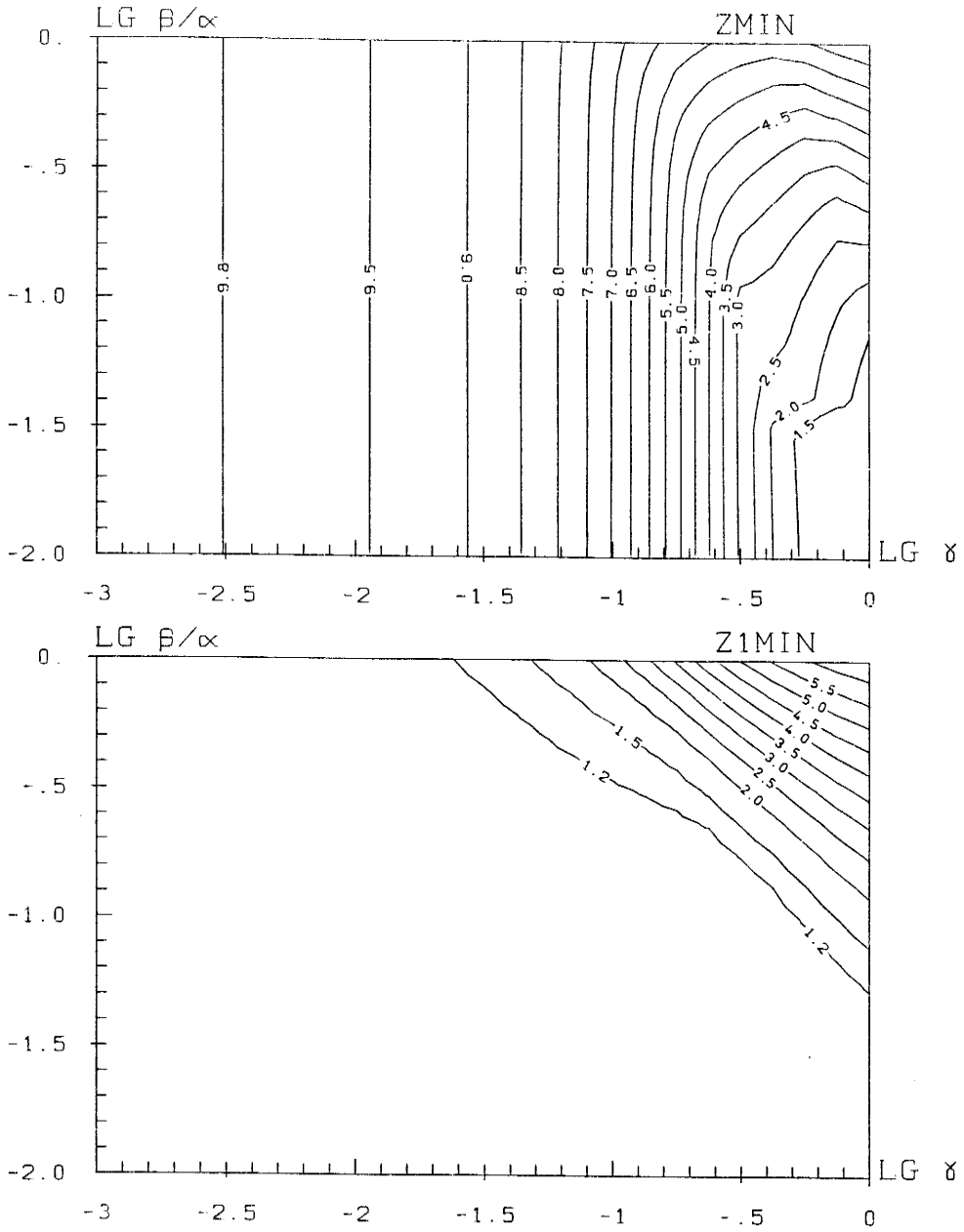
LG ε/α = -3.0; LF 4



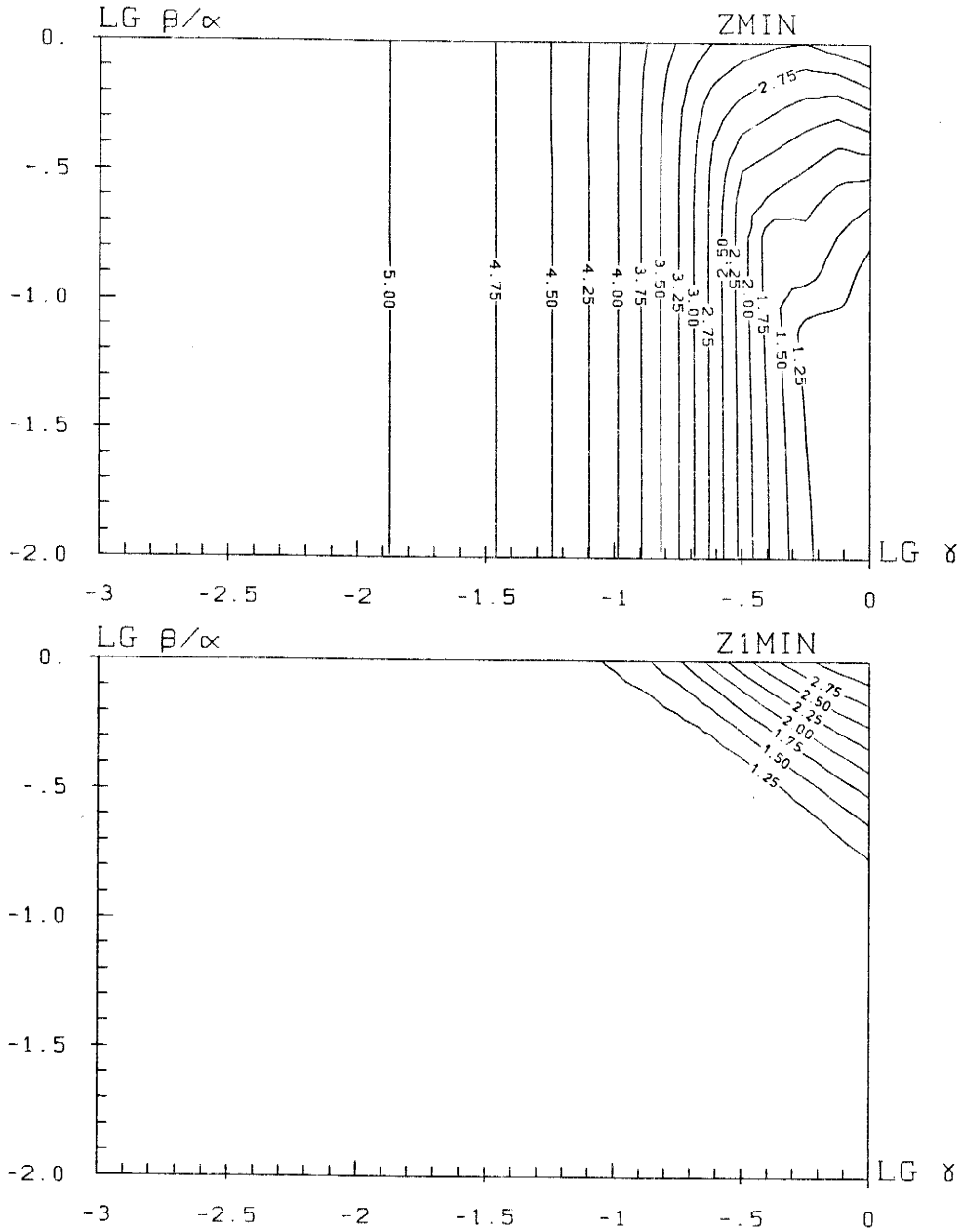
LG ε/α = -2.5; LF 4



LG ε/α = -2.0; LF 4



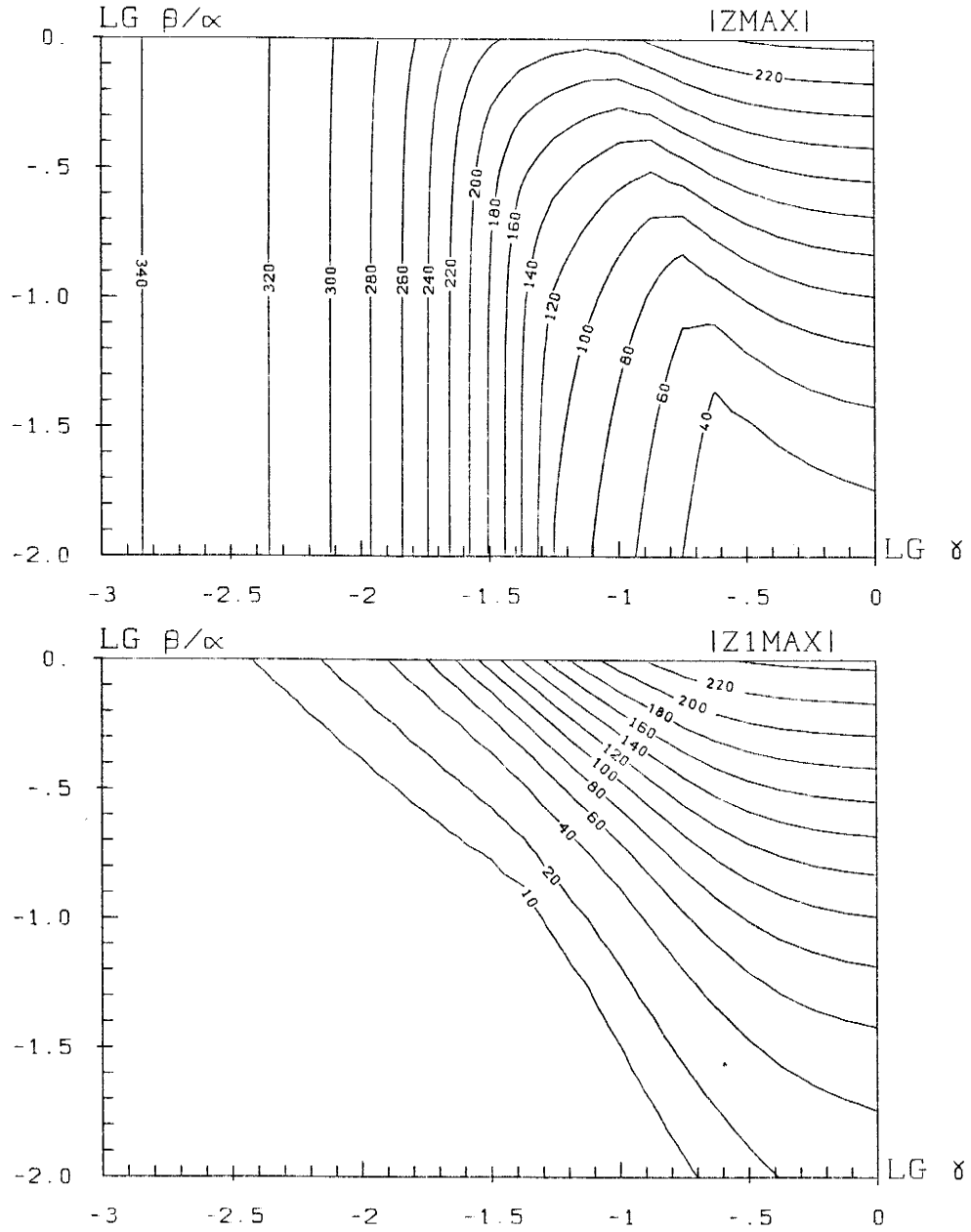
LG ε/α = -1.5; LF 4



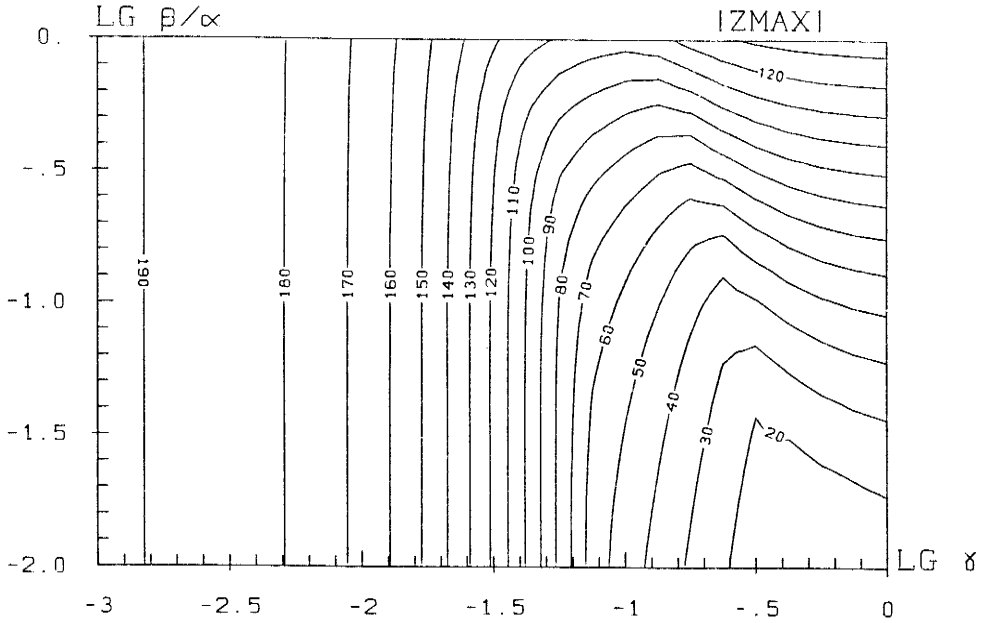
LG ε/α = -1.0; LF 4

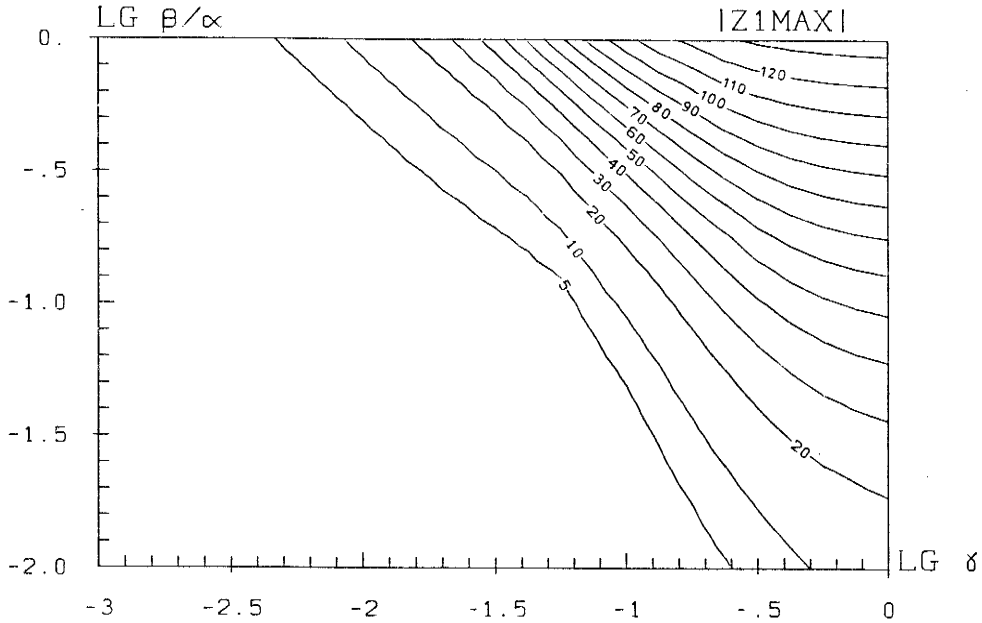
Anlage VIII

Amplituden im Lastfall 5

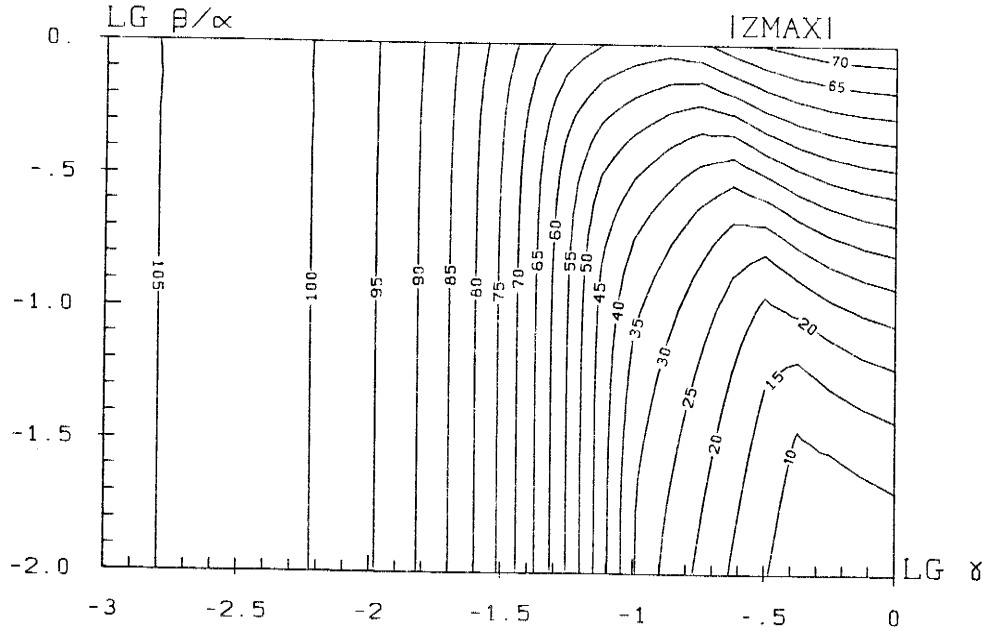


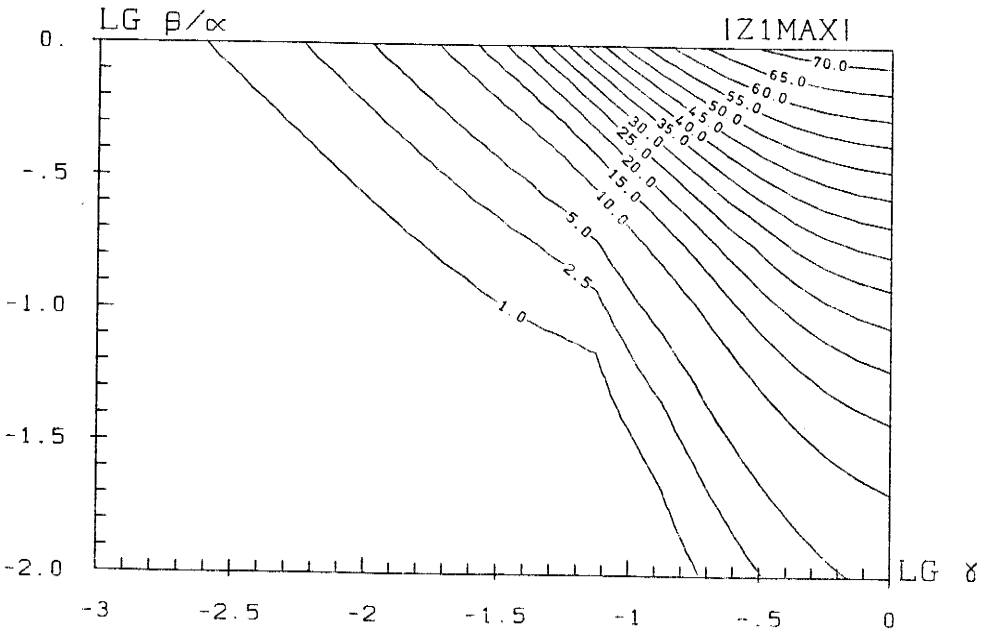
LG ε/α = -4.5; LF 5



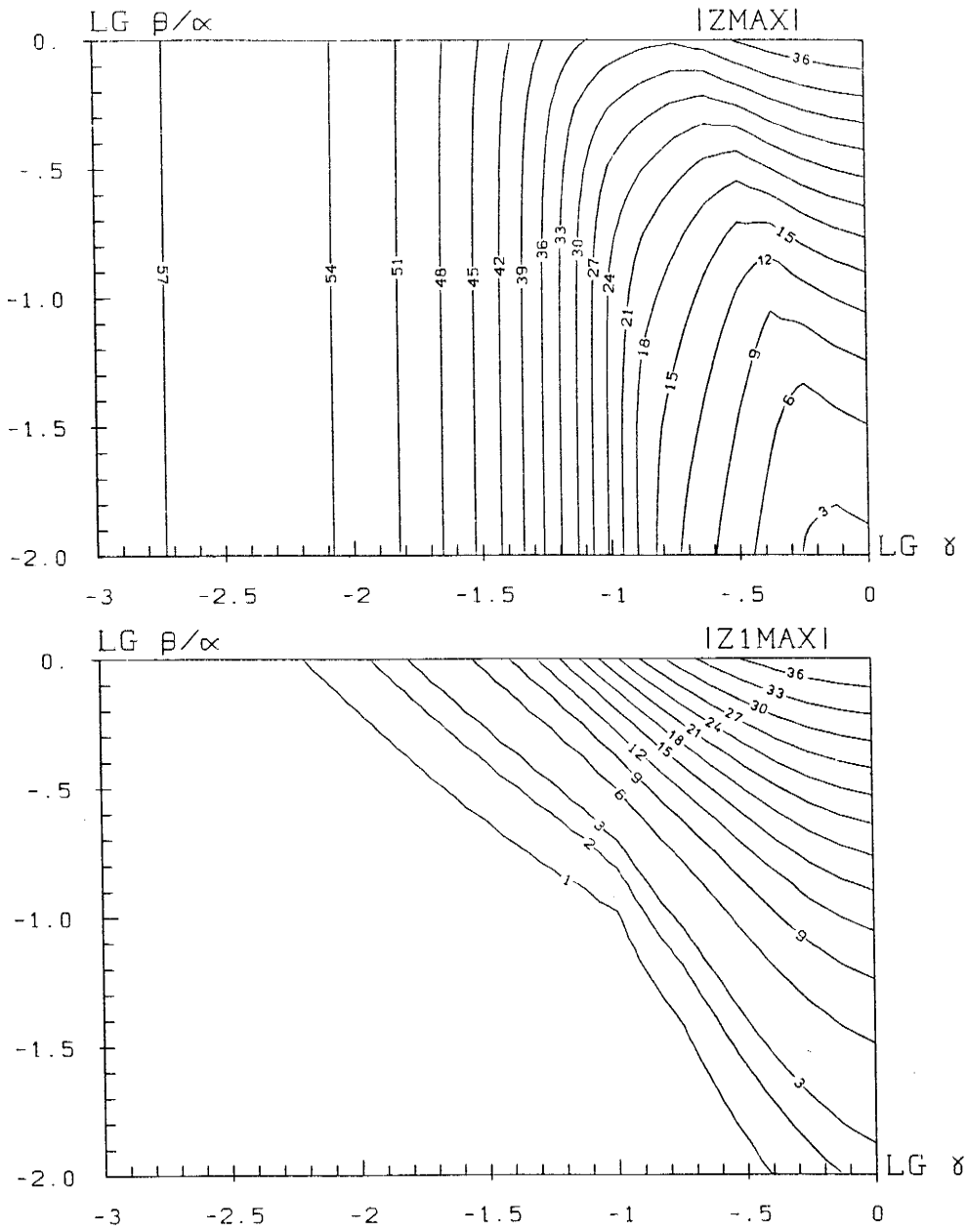


LG ε/α = -4.0; LF 5

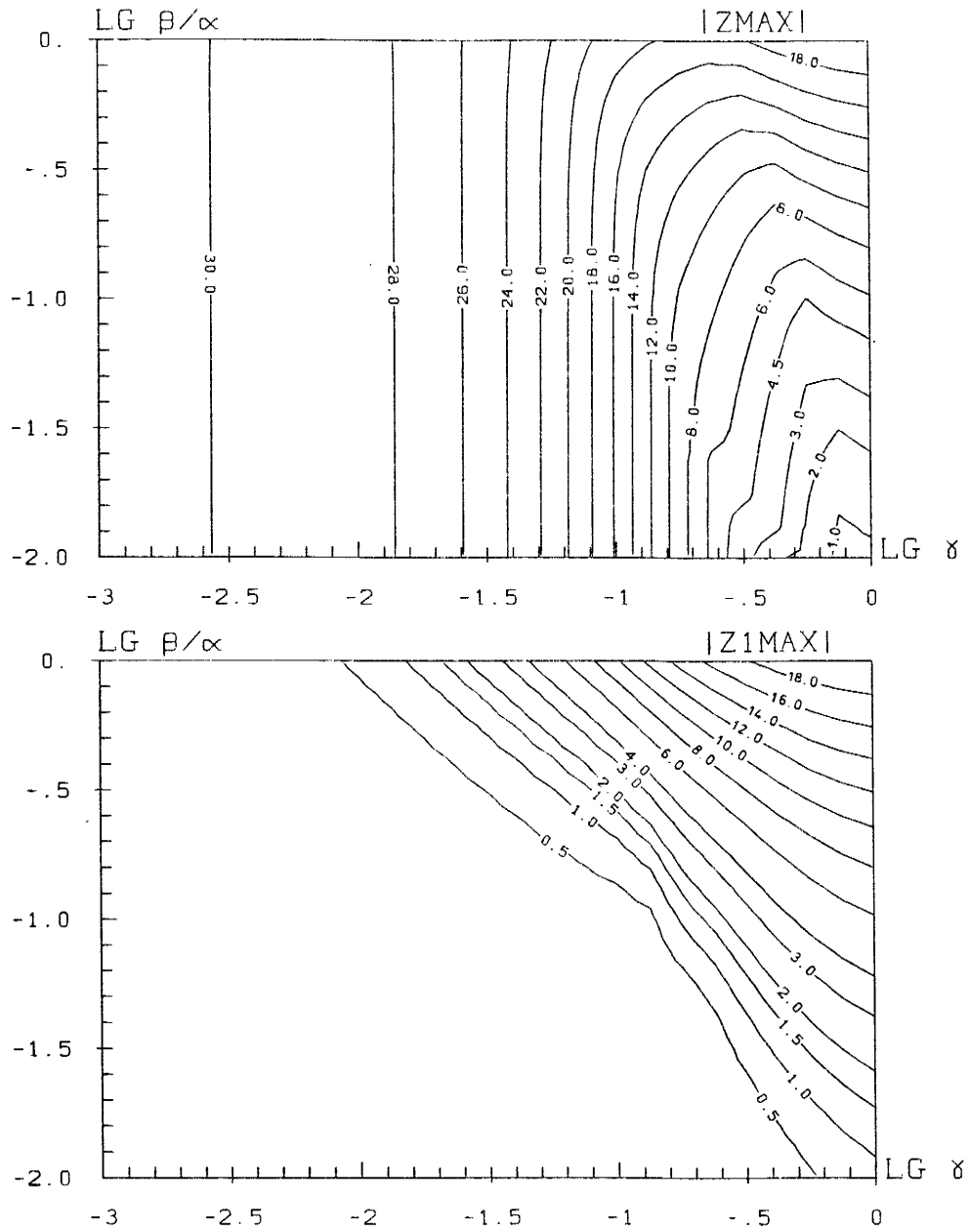




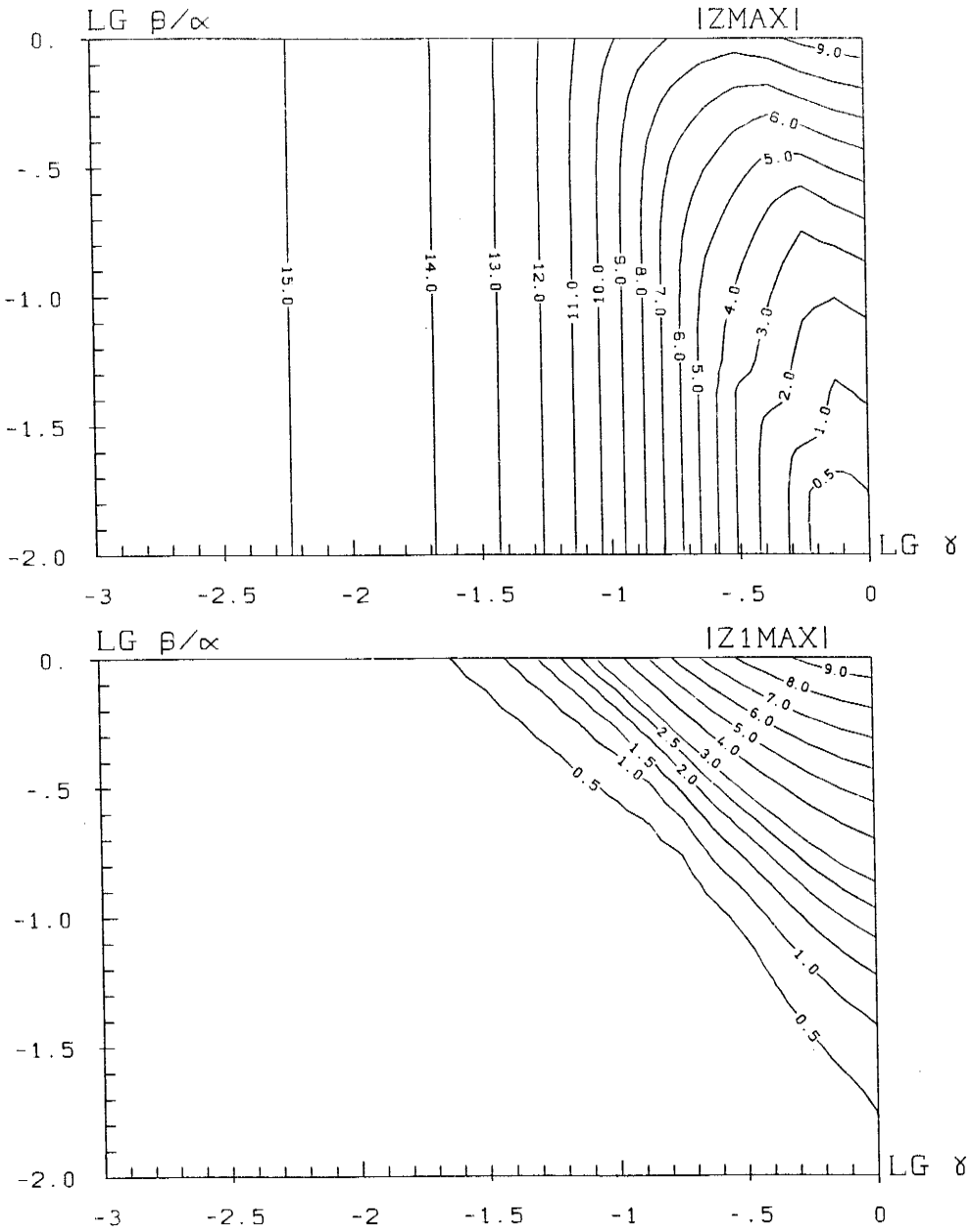
LG ε/α = -3.5; LF 5



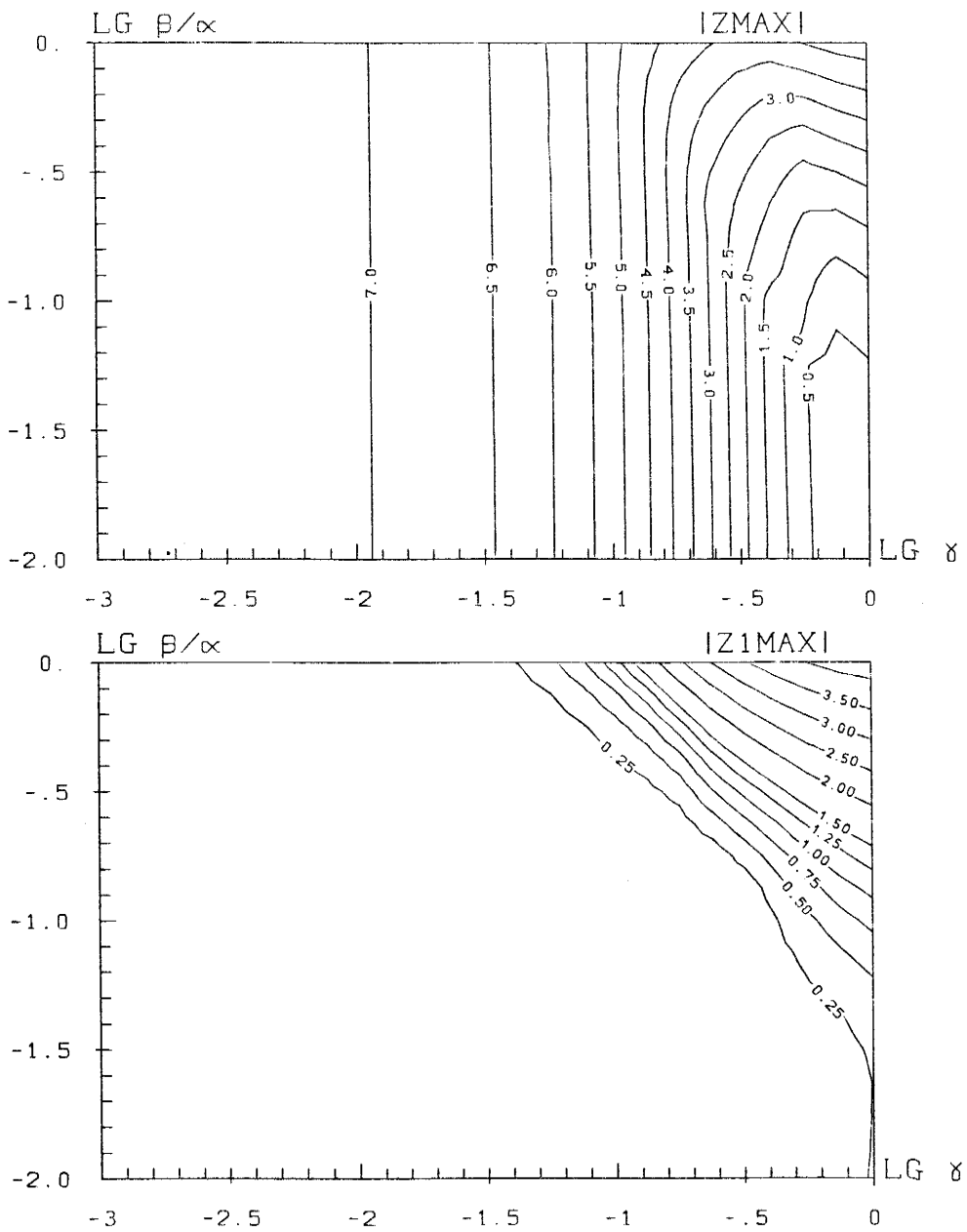
LG ε/α = -3.0; LF 5



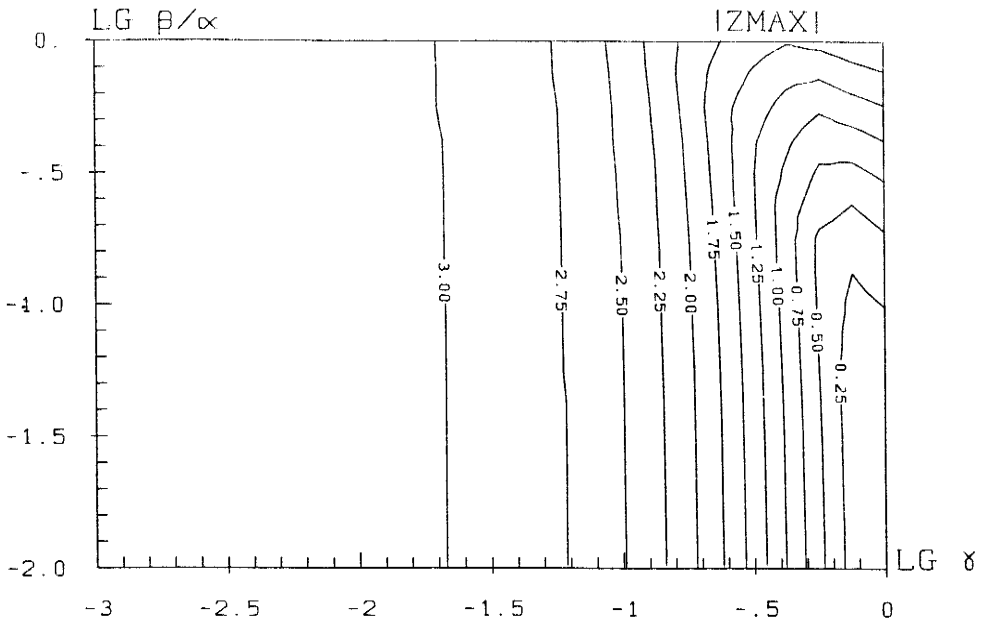
LG ε/α = -2.5; LF 5

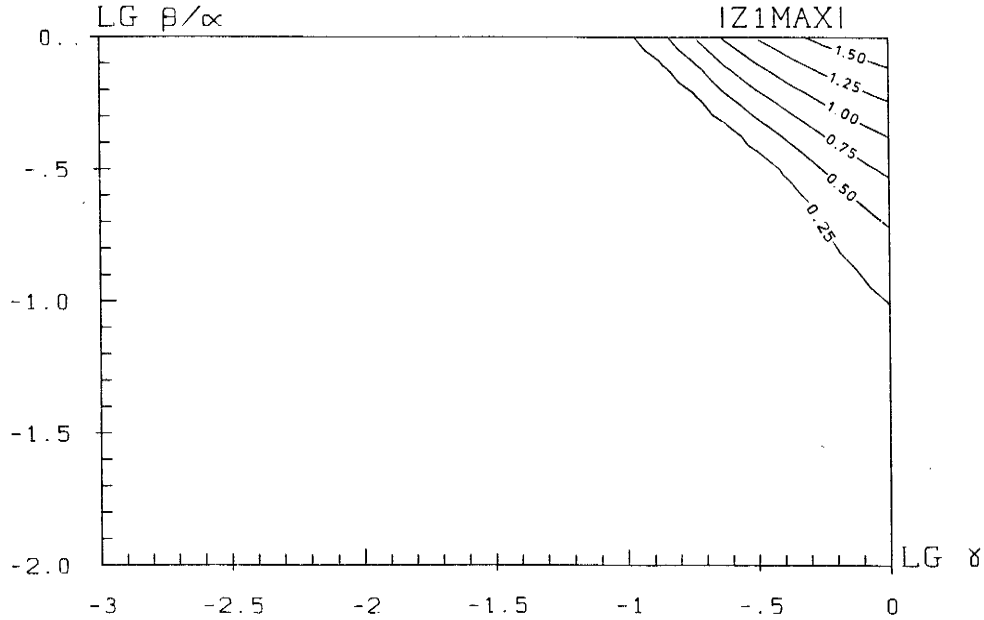


LG ε/α = -2.0; LF 5



LG ε/α = -1.5; LF 5

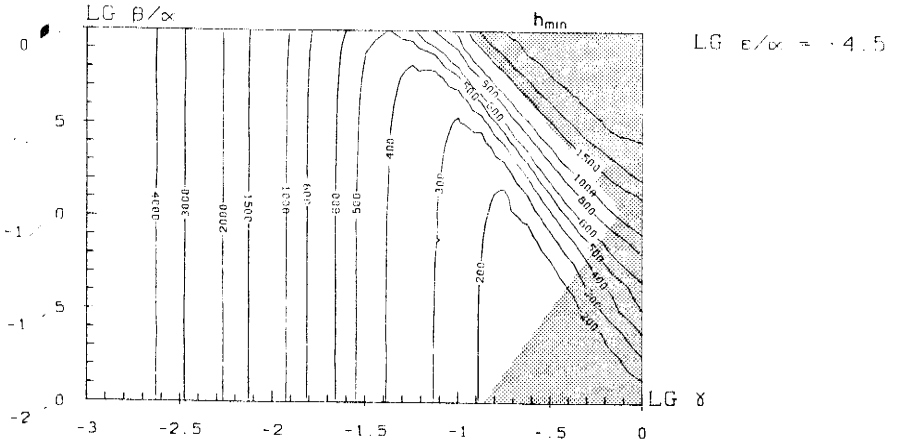


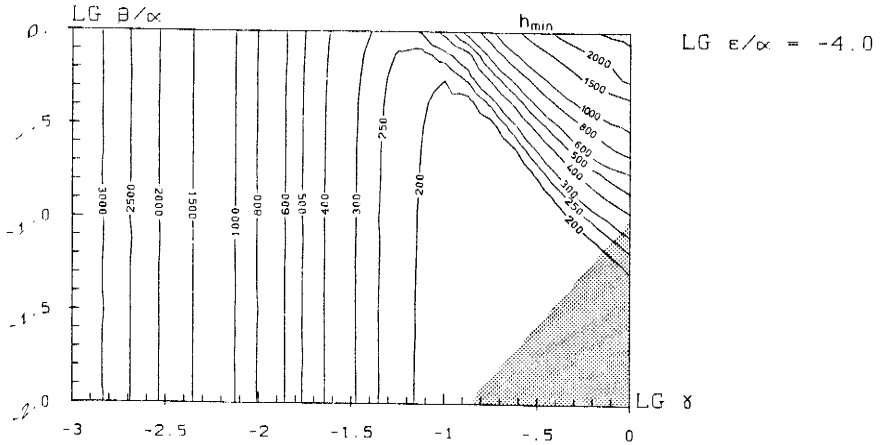


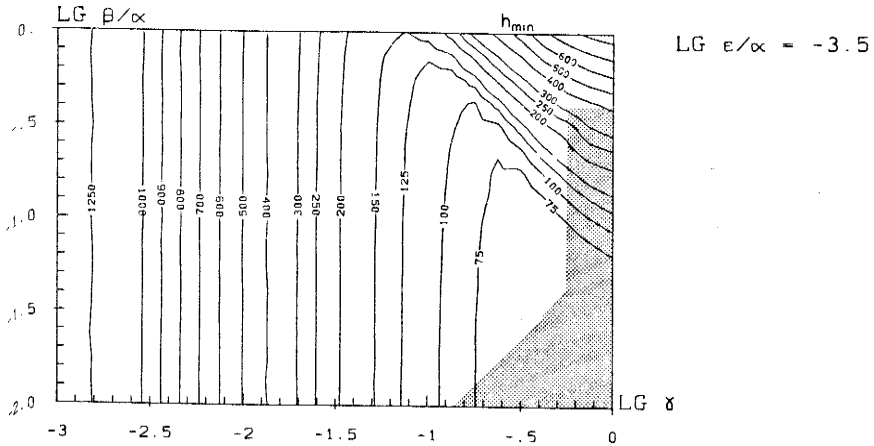
LG ε/α = -1.0; LF 5

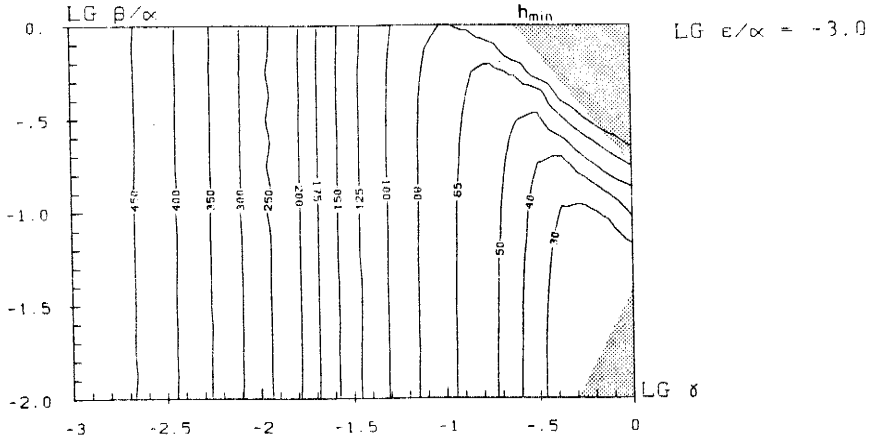
Anlage IX

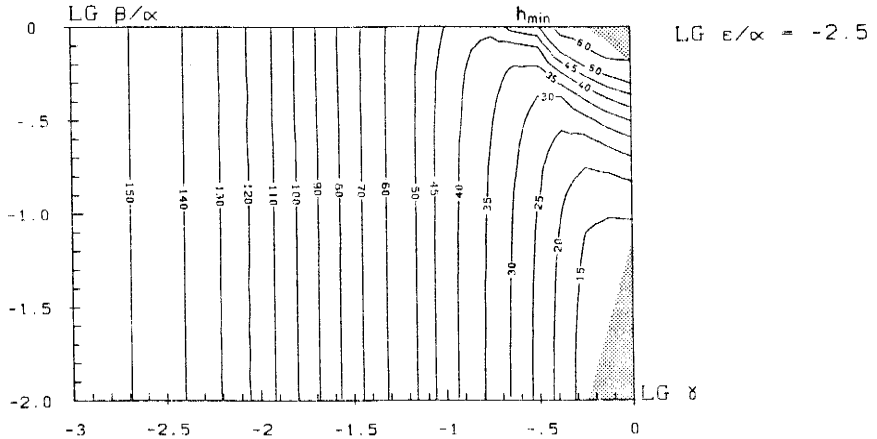
Mindestfallhöhen nach dem Stabilitätskriterium

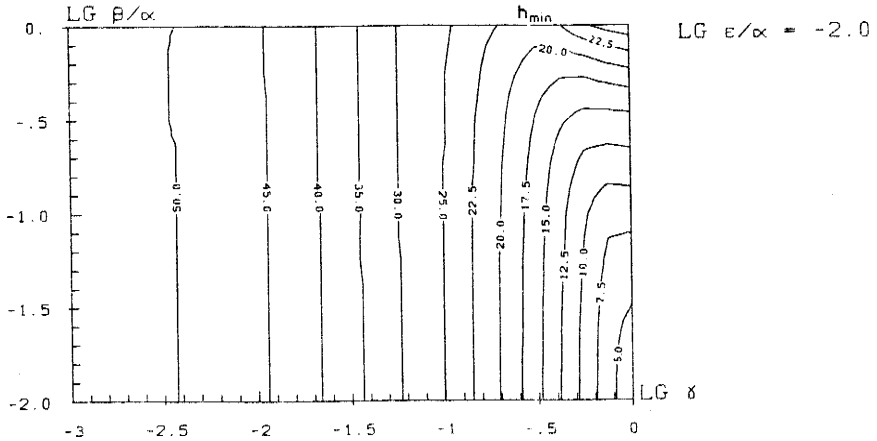

LG β/α
h_{min}
LG ε/α = -4.5
LG γ

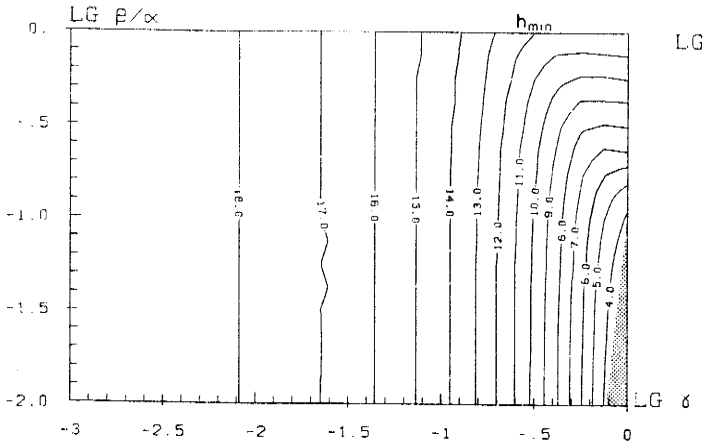

LG β/α
h_{min}
LG ε/α = -4.0
LG γ

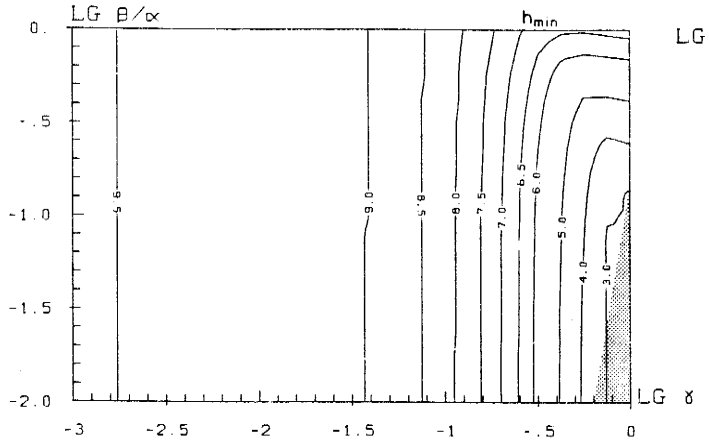

LG β/α
h_{min}
LG ε/α = -3.5
LG γ


LG β/α
h_{min}
LG ε/α = -3.0
LG γ


LG β/α
h_{min}
LG ε/α = -2.5
LG γ


LG β/α
h_{min}
LG ε/α = -2.0
LG γ





Anlage X

Literaturverzeichnis

X. Literaturverzeichnis

[1] Becker, Martin: Numerische Verfahren.
Vorlesungsskript, Wuppertal, 1979

[2] Collatz, Lothar: The Numerical Treatment of Differential Equations.
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1966

[3] Heinl, Manfred: Die Stabilität der Schwingungen in Differentialwasserschlössern bei idealer Regelung auf konstante Leistung.
Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU-Berlin, Mitt. Nr. 91/1979

[4] Johnson, Raymond D.: The Differential Surge Tank.
Transactions, American Society of Civil Engineers, Paper No. 1324, 1914

[5] Köngeter, Jürgen: Rohrreibungsverluste einer oszillierenden turbulenten Strömung in einem Kreisrohr konstanten Querschnitts.
Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU-Berlin, Mitt. Nr. 95/1980

[6] Krüger, Rudolf: Strömungserscheinungen an einer Blende in oszillierender Rohrströmung.
Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU-Berlin, Mitt. Nr. 88/1977

[7] Meyer, Rainer: Wasserschloßschwingungen in Schacht- und Kammerwasserschlössern.
Diplomarbeit, unveröffentlicht; Wuppertal 1984

[8] Morgenstern, Dieter: Dimensionierung von Differentialwasserschlössern mit optimaler Schwingungsdämpfung.
Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU-Berlin, Mitt. Nr. 83/1975

[9] Schroeder, F.H.: Stromfadentheorie reibungsfreier Flüssigkeiten.
Seminarvortrag, unveröffentlicht; Wuppertal 1985

[10] Stucky, Alfred: Druckwasserschlösser von Wasserkraftanlagen.
Springer-Verlag; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962

[11] Szabó, István: Einführung in die technische Mechanik.
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1975

[12] Thoma, Dieter: Beiträge zur Theorie des Wasserschlosses.
Kgl. Technische Hochschule zu München, Dissertation, 1910

[13] Truckenbrodt, Erich: Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik.
Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983

L E B E N S L A U F

Persönliche Daten:

Geboren am 27.12.1954 in Remscheid, verheiratet seit 1980, zwei Kinder, geboren 1980 und 1982

Schulischer und beruflicher Werdegang:

1961 - 1965 Daniel-Schürmann-Schule, Remscheid

1965 - 1973 Leibniz-Schule (mat. nat. Gym.), Remscheid, bis zum Abitur

1973 - 1975 Wehrdienst

1975 - 1981 Studium der Bautechnik an der Universität - Gesamthochschule Wuppertal, Studienrichtung konstruktiver Ingenieurbau
Abschluß als Dipl.-Ing. (TH)

Diplomarbeit: "Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines Glockenturmes"

1981 - 1986 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Lehr- und Forschungsgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft an der Bergischen Universität - Gesamthochschule Wuppertal